Stefano Russo

La Fisica come studio dell'energia

Volume 1 - Meccanica

Ai miei genitori

Indice generale

1 - Cos'è la Fisica.

La Fisica è una disciplina scientifica sperimentale. Lo scopo della disciplina è la rappresentazione dei fenomeni naturali attraverso modelli matematici, deducibili da pochi e semplici principi di base, atti a comprendere i meccanismi che presiedono ai comportamenti osservabili e prevederne l'andamento, o comprenderne, l'origine in diversi contesti.

Alla base della disciplina sta, quindi, il convincimento, comune a tutti i fisici, secondo cui "*l'universo (...) è scritto in lingua matematica...*" (Galileo Galilei, 1564-1642, fisico, astronomo, filosofo e matematico italiano).

Nonostante la vastità del suo campo d'indagine la Fisica ha lasciato spazio ad altre discipline scientifiche sperimentali ma, grazie al sovrapporsi di alcuni dei suoi campi di indagine con quelli delle altre discipline, ha sempre mantenuto un ruolo di primo piano nell'ambito del sapere scientifico.

1.1 - La Fisica come studio dell'energia.

La grandezza fisica che collega tutti i rami del sapere della disciplina è l'energia.

Possiamo dire che "la Fisica è la disciplina che studia l'energia, nelle sue forme, nel suo trasformarsi (cambiare forma) e nel suo propagarsi (cambiare posizione)".

Questa definizione è coerente con quello che attualmente risulta essere il campo d'indagine della Fisica e sottolinea il ruolo fondamentale svolto dall'energia nella disciplina.

Tale importanza è confermata anche dal fatto che il principio più generale, ed attualmente considerato irrinunciabile dagli addetti ai lavori, è il principio di conservazione dell'energia, del quale parleremo più diffusamente nel prossimo capitolo.

1.1.1 - I campi di indagine e l'energia.

I campi di indagine della Fisica sono storicamente suddivisi in:

- **meccanica** (classica e relativistica) che consiste nello studio del moto dei corpi (cinematica), delle interazioni fra corpi (dinamica) e delle energie legate ai moti ed alle interazioni fra corpi, le cosiddette **energie meccaniche**;

- **termologia e termodinamica** che consistono nello studio dei fenomeni termici (scambi di energia termica fra corpi) e delle macchine termiche: tutto quanto riguarda l'**energia termica;**

- **elettrologia ed elettromagnetismo** che consistono nello studio dei fenomeni legati alla presenza, in natura, di materia elettricamente carica ed alle conseguenze dell'esistenza di tale carica, ovvero, le **energie elettromagnetiche**;

- **fisica della materia** (meccanica quantistica e fisica nucleare e subnucleare) che consiste nello studio della materia a livello microscopico, ovvero del comportamento dell'**energia materica**.

1.2 - Grandezze, misure ed unità di misura.

La Fisica fa uso di modelli matematici: allo scopo è quindi necessario rappresentare i concetti utilizzati nei modelli con dei numeri. Questi sono le misure delle grandezze fisiche.

Una grandezza fisica è un concetto che può essere quantificato attraverso un numero. Ad esempio: se un corpo si sposta il suo spostamento (concetto che rappresenta l'atto con il quale un corpo cambia la propria posizione rispetto ad un riferimento fisso) è misurabile con il numero di unità di misura dello spostamento che servono per collegare la posizione di partenza con quella d'arrivo.

È chiaro che la misura sarà diversa a seconda dell'unità utilizzata: se uno spostamento misurato in numero di stature medie di una persona risulterà pari ad 1, allora misurerà circa 175 centimetri, cioè 1,75 metri.

Allo scopo di avere delle misure univocamente interpretabili si è costruito un sistema di unità di misura detto Sistema Internazionale, basato sulle sette grandezze in elenco:

Grandezza (simbolo)	Unità di misura (simbolo)
lunghezza, distanze, spostamenti, ... (l, d, s,...)	metro (m)
massa (m)	chilogrammo (kg)
tempo (t)	secondi (s)
intensità di corrente elettrica (I)	ampére (A)
temperatura (T)	kelvin (K)
quantità di sostanza (n)	mole (mol)
intensità luminosa (I)	candela (cd)

Esse sono definite in modo da essere ovunque riproducibili e stabili nel tempo. Se l'unità di misura delle lunghezze fosse la statura media della popolazione, questa cambierebbe a seconda della razza e della zona geografica nella quale viene stimata con la conseguenza che lo stesso esperimento darebbe risultati diversi. Inoltre la statura media si modifica continuamente nel tempo rendendo inutilizzabili i risultati ottenuti dalla generazione precedente.

Purtroppo ad oggi molti stati, principalmente quelli di lingua anglosassone, non hanno ancora adottato le unità del Sistema internazionale ed è per questo che misuriamo ancora la diagonale degli schermi televisivi e le misure dei dischi per computer in pollici, il volume del petrolio in barili, la potenza dei motori in cavalli vapore, etc.

1.2.1 - Grandezze scalari e vettoriali

Abbiamo detto che in Fisica non esistono grandezze che non possano essere quantificate attraverso un valore numerico, la loro misura.

Esistono, però, grandezze che possono essere descritte anche attraverso la propria geometria: queste grandezze vengono chiamate "*grandezze vettoriali*" e sono descritte dal valore, da una direzione e da un verso. Un esempio tipico sono gli spostamenti, rappresentabili come frecce che congiungono il punto di partenza al punto d'arrivo, con un tratto rettilineo, la direzione, nel verso del punto d'arrivo, il verso, lunghe quanto basta, il valore della misura o modulo del vettore.

Nelle formule le grandezze vettoriali si riconoscono poiché sono indicate con una freccina orizzontale verso destra sopra alla lettera che le rappresenta o perché la lettera che le rappresenta è scritta col carattere in grassetto. In questo testo si utilizzerà il carattere in grassetto.

Le grandezze prive di geometria sono invece dette "*grandezze scalari*" e sono descritte solo dal valore della loro misura.

Per una trattazione più completa sull'argomento delle grandezze vettoriali si rimanda all'appendice A3.

1.2.2 - Misure ed errori.

In Fisica non esistono misure prive d'errore.

Gli errori tipicamente commessi durante una misura sono classificabili in vari modi, ma quello che è importante sapere è che, per quanto si sia attenti e per quanto sia curata la realizzazione delle strumentazioni in uso, è impossibile determinare la (singola) misura con più cifre significative di quante ne fornisca lo strumento: qualunque misura è, quindi, affetta da un errore non eliminabile.

Questo, naturalmente, non significa che le misure siano sbagliate: nella migliore delle ipotesi, facendo la misura con cura, attenzione ed una strumentazione adatta, la misura è affetta da un errore tipicamente piccolo rispetto alla misura stessa.

Per una trattazione più completa sull'argomento si rimanda all'appendice A1.

1.3 - Il metodo scientifico.

Le scienze sperimentali, come la Fisica, si basano sul cosiddetto metodo scientifico di indagine.

Il metodo scientifico è un metodo di indagine che consiste di tre passi:

- **creazione ed esecuzione di un esperimento** che consiste nello studio di un fenomeno allo scopo di creare un contesto nel quale sia facile isolarlo da altri fenomeni per misurare le grandezze coinvolte in modo che i valori trovati dipendano soltanto dal fenomeno analizzato;

- **costruzione di un modello matematico del fenomeno** che consiste nell'analisi dei dati ottenuti dall'esperimento e nell'individuazione delle relazioni matematiche che lo governano (se ci sono!);

- **verifica del modello** attraverso ulteriori osservazioni (ad es. ulteriori esperimenti) nelle quali si verificherà la corrispondenza fra previsioni del modello e dati osservati.

Tutto questo sperimentare e creare modelli matematici non è che la prima parte del lavoro: a questo punto entrano in gioco i fisici teorici che, partendo dai singoli modelli già verificati, cercano di dedurre leggi generali, i principi, e da questi costruire modelli matematici generali dai quali siano ricavabili i modelli matematici dei singoli fenomeni analizzati.

Questi modelli generali vengono a loro volta studiati alla ricerca di fenomeni che, stando al modello, potrebbero aver luogo ma che non sono mai stati osservati. Lo scopo di questa ricerca è creare nuovi esperimenti che isolino questi nuovi fenomeni e permettano di verificare la consistenza della legge matematica generale e del principio che questa rappresenta.

2 - L'energia e il principio di conservazione.

Come abbiamo detto, la Fisica è la disciplina che studia l'energia, in tutte le sue forme, nel suo trasformarsi da una forma ad un'altra e nel suo spostarsi da un luogo ad un altro.

Ma vediamo più da vicino cos'è l'energia e perché è una grandezza tanto importante.

2.1 - Cos'è l'energia.

Per prima cosa definiamo ciò di cui stiamo parlando: iniziamo dando una definizione abbastanza rigorosa dell'energia.

L'energia è la misura del lavoro che un sistema è in grado di compiere.

L'unità di misura delle energie è il joule (simbolo: J).

L'unità di misura prende il nome dal fisico James Prescott Joule (1818-1889), valente ricercatore di cui si ricorda l'impegno profuso negli ambiti dell'equivalenza fra energie meccaniche ed energia termica e della produzione di energia termica nella conduzione elettrica.

Come tutti i nomi di unità di misura che derivano dal nome di un ricercatore, la lettera che le rappresenta, l'iniziale del cognome, è maiuscola ma il nome dell'unità, essendo un nome comune, viene indicato con la lettera minuscola.

2.2 - Il principio di conservazione.

La centralità dell'energia nella disciplina è sottolineata dal fatto che esiste una sola legge sempre valida qualunque sia lo specifico fenomeno che si analizzi; questa legge, detta **Principio di conservazione dell'energia** è dunque la legge fondamentale della Fisica e postula che:

“***l'energia non si crea né si distrugge ma si trasforma***”.

Il principio di conservazione dell'energia ci dice che, preso in considerazione un determinato sistema fisico **isolato**, ovvero un insieme di corpi reali che interagiscono fra loro (ovvero agiscono l'uno sull'altro) ma non con elementi esterni al sistema, questo evolve garantendoci che l'energia in esso contenuta si conservi.

Questo significa che, se noi consideriamo il sistema universo, ovvero l'insieme di tutto ciò che costituisce l'universo, dato che non esistono elementi esterni al sistema con cui questi possano interagire, il sistema è isolato e quindi **l'energia presente nell'universo è costante**.

Su scale più piccole, **un sistema composto da corpi che interagiscano esclusivamente fra loro, conserva la propria energia**. Questo significa che, ad esempio, un sistema composto da una

pallina che cade sotto l'azione dell'attrazione gravitazionale è isolato se comprende anche il pianeta con cui la pallina interagisce. Diventa un sistema non isolato se un cane azzanna al volo la pallina poiché, in quel momento, la pallina interagisce col cane, corpo che non appartiene al sistema. Se però includiamo il cane nel sistema, questo torna ad essere isolato.

Possiamo quindi considerare un sistema fisico isolato come un contenitore rigido di energia. Immaginiamo una bottiglia: le varie sostanze presenti nella bottiglia rappresentano le diverse forme sotto le quali l'energia sarà presente. Se la bottiglia è piena d'acqua abbiamo una sola forma d'energia (la pallina ferma) ma quando il sistema evolve per un'interazione fra elementi del sistema, parte dell'energia cambierà forma (la pallina inizia a muoversi). È come versare dell'acqua: il volume che si libera verrà occupato dall'aria ma il volume totale sarà sempre il medesimo. Se però avviene un'interazione con un corpo esterno al sistema (interviene il cane) stiamo cambiando il contenitore: il sistema non è più isolato.

2.3 - Le energie meccaniche.

In questa parte del nostro percorso porremo particolare attenzione alle energie meccaniche. Per cominciare, cerchiamo di capire quali sono le diverse forme di energia che appartengono al gruppo delle energie meccaniche, e come si definiscono.

In generale quando un corpo è in moto rispetto ad altri possiede è in grado di compiere del lavoro, ovvero di “fare delle cose” (vedremo nel capitolo 4 cosa questo significhi per la Fisica), quindi, per definizione, possiede energia. Possiamo dunque dire che esiste una forma di energia legata al moto: tale energia viene detta cinetica, dal greco **kinema** che significa, appunto, movimento. Possiamo dunque dire che “*l'energia cinetica è l'energia posseduta da un sistema per il fatto che una sua parte è in movimento rispetto al resto del sistema*”.

Anche la pallina che cade sotto la spinta della forza di gravità acquista una sempre maggiore velocità e, conseguentemente, il sistema che la contiene acquista una sempre maggiore energia cinetica. Ma se vale il principio di conservazione dell'energia, da dove viene l'energia cinetica che il sistema acquista mentre la pallina cade?

L'interazione fra corpi, ovvero la **forza**, può generare una forma di energia detta **potenziale**, poiché potenzialmente in grado di prodursi in un effetto visibile (il moto di caduta). Perché questo sia possibile la forza deve essere **conservativa**, ovvero non deve trasformare energie meccaniche in energia termica, come fanno le forze **dissipative** (ad esempio la forza che agisce fra i palmi delle mani quando li si sfregano: l'attrito). Possiamo quindi dire che “*l'energia potenziale è l'energia posseduta da un sistema per il fatto che, fra alcune sue parti, agisce una forza conservativa*”.

2.3.1 - Le forze e la conservazione dell'energia meccanica.

Nel capitolo precedente abbiamo parlato di forze. La forza è la grandezza fisica che descrive l'interazione fra i corpi. Si misura con il dinamometro e la sua unità di misura è il newton (N) (dal nome di Isaac Newton, 1643-1727, fisico, matematico, astronomo, filosofo naturale, alchimista e teologo inglese che introdusse la forza nella Fisica).

Veniamo alla differenza fra forze '*conservative*' e '*dissipative*'. Questa classificazione delle forze è relativa alla possibilità di conservare l'energia meccanica totale, ovvero la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, del sistema.

Perché è così importante sapere se l'energia meccanica si conserverà? Perché la trasformazione dell'energia avviene spontaneamente nella direzione dissipativa, ovvero da energie meccaniche ad energia termica, ma non in direzione opposta! Dato che, quindi, l'energia termica non si trasforma spontaneamente in energia meccanica ed esistono dei limiti anche nella possibilità di trasformarla con l'ausilio di macchine dedicate a questo scopo, risulta utile in tutte le macchine limitare il più possibile la trasformazione dell'energia meccanica in energia termica.

Per questa ragione è stata coniata l'infelice espressione "*energia degradata*", che viene utilizzata in riferimento all'energia termica. Questo non significa, però, che l'energia termica sia una forma '*inferiore*' di energia: se non ci fosse lei noi saremmo tutti congelati! E ben vengano anche le forze dissipative (con relativa trasformazione dell'energia meccanica in energia termica): se non ci fossero loro non potremmo neppure spostarci dato che scivoleremmo su qualunque superficie!

2.E - Esercizi.

2.E.1 - Si consideri il sistema fisico composto da una pallina ferma ad una distanza nota da terra. Sapendo che l'energia potenziale che questa possiede è pari a 5.000 J, si dica:

a – quanto vale l'energia cinetica del sistema;
b – quanto vale l'energia meccanica totale del sistema.

Ad un tratto la pallina viene liberata dal vincolo che la bloccava e cade. Si dica:

c – quanto vale l'energia meccanica totale del sistema nell'istante in cui la pallina tocca terra;
d – quanto vale l'energia potenziale del sistema nell'istante in cui la pallina tocca terra;
e – quanto vale l'energia cinetica del sistema nell'istante in cui la pallina tocca terra.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a – 0 J; b – 5.000 J; c – 5.000 J; d – 0 J; e – 5.000 J]

2.E.2 - Si consideri il sistema fisico composto da una pallina ferma ad una distanza nota da terra. Sapendo che l'energia potenziale che questa possiede è pari a 3.000 J, si dica:

a – quanto vale l'energia cinetica del sistema;
b – quanto vale l'energia meccanica totale del sistema.

Ad un tratto la pallina viene liberata dal vincolo che la bloccava, cade e rimbalza. Si dica, con riferimento alla massima quota che la pallina raggiunge dopo il rimbalzo:

c – quanto vale l'energia totale del sistema quando la pallina raggiunge alla massima quota;
d – quanto vale l'energia cinetica del sistema sapendo che l'energia potenziale del sistema vale 2.000 J e che

giunge alla massima quota fermandosi;

e – che tipo di energia è entrata in gioco nella fase del rimbalzo e quanto vale.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a – 0 J; b – 3.000 J; c – 3.000 J; d – 0 J; e – 1.000 J]

2.E.3 – Un cannone spara una palla di piombo fornendole un'energia cinetica iniziale di 50.000 J. Sapendo che l'energia potenziale iniziale che questa possiede (nell'istante in cui esce dal cannone) è pari a 5.000 J, si dica:

a – quanto vale l'energia meccanica totale iniziale del sistema.

Sapendo che la palla di cannone raggiunge la massima quota con un'energia cinetica residua di 30.000 J, si dica:

b – quanto vale l'energia totale del sistema quando la palla raggiunge la massima quota;

c – quanto vale l'energia potenziale del sistema quando la palla raggiunge la massima quota.

La palla ricade e raggiunge la quota del terreno. Si dica:

d – quanto vale l'energia meccanica totale finale del sistema;

e – quanto vale l'energia potenziale finale del sistema;

f – quanto vale l'energia cinetica finale del sistema.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a – 55.000 J; b – 55.000 J; c – 25.000 J; d – 55.000 J; e – 0 J; f – 55.000 J]

3 - Le energie meccaniche.

Abbiamo visto che esistono diverse forme di energia e che, in questo testo, intendiamo studiare le energie meccaniche. Iniziamo, in questo capitolo, ad analizzarle con maggiore dettaglio.

3.1 - Le energie potenziali.

Come detto nel paragrafo 2.3, **l'energia, posseduta da un sistema per il fatto che, fra alcune sue parti, agisce una forza conservativa, si chiama energia potenziale**.

Le due forme di energia potenziale più importanti, nell'ottica della meccanica, sono l'energia potenziale gravitazionale e l'energia potenziale elastica. Vediamole più da vicino.

3.1.1 - L'energia potenziale “per eccellenza”: l'energia potenziale gravitazionale.

L'“***energia potenziale gravitazionale***”, detta anche, più semplicemente, “*energia potenziale*” (che è quella gravitazionale lo si sottintende), è l'energia che un sistema possiede per il fatto che fra alcune sue parti agisce la forza di gravità.

Per ora cerchiamo di capire cosa accade quando uno dei due corpi fra cui agisce la forza di gravità è la terra, o più in generale un corpo celeste, e l'altro corpo è posto in prossimità della sua superficie, ovvero quando la forza di gravità viene detta “***forza peso***” e risponde all'equazione:

$$\boldsymbol{F_p} = m \cdot \boldsymbol{g}. \quad (3.1)$$

nella quale m è la massa del corpo e $\boldsymbol{g}$ è l'accelerazione di gravità.

Vediamo con maggiore dettaglio gli ‘ingredienti’ della forza peso.
La **massa** (m) è la grandezza che misura la quantità di materia che costituisce un corpo e la sua unità di misura è il chilogrammo (kg). Si misura con la bilancia.
L'**accelerazione di gravità** ($\boldsymbol{g}$) è la grandezza che misura la rapidità con cui varia la velocità di un corpo per effetto della sola interazione gravitazionale con il corpo celeste, ovvero quando possiamo trascurare l'effetto degli attriti con l'aria. La sua unità di misura è il metro al secondo quadrato, come per qualunque altra accelerazione, e la si misura con l'accelerometro. L'accelerazione di gravità, in prossimità della superficie terrestre, è pressoché costante. Essa vale 9,81 m/s^2 al livello del mare e decresce molto lentamente con il crescere della quota a cui ci si trova: in cima all'Everest, il monte più alto del mondo, alla quota di circa 8850 m sul livello del mare, l'accelerazione di gravità vale ancora 9,78 m/s^2. Nei nostri problemi utilizzeremo il valore semplificato di 9,8 m/s^2.

La (3.1) è un tipico esempio di equazione delle forze. Infatti, qualunque forza risponde all'equazione:

$$\boldsymbol{F} = m\cdot\boldsymbol{a}. \quad (3.2)$$

nella quale m è la massa del corpo e $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione che questo subirebbe se sottoposto all'azione della sola forza $\boldsymbol{F}$. Allo stesso modo, per un corpo che subisce l'azione di più forze possiamo trovare la forza totale agente sul corpo misurandone l'accelerazione ed applicando la (3.2). La sua importanza nella disciplina è tale che viene comunemente indicata come "***legge fondamentale della dinamica***".

Nella (3.1) possiamo osservare che l'accelerazione di gravità e la forza peso sono vettori aventi la medesima geometria. La forza peso, come l'accelerazione di gravità è, ovviamente, un vettore con direzione verticale e con verso rivolto verso il basso.

Essendo la forza di gravità, anche nelle condizioni in cui la chiamiamo forza peso, una forza conservativa, possiamo definire una corrispondente energia potenziale. Nelle stesse condizioni, la formula che permette di calcolarne il valore è la seguente:

$$E_p = m\cdot g\cdot h; \quad (3.3)$$

nella quale m è la massa del corpo, g è l'accelerazione di gravità prodotta dal corpo celeste ed h è la quota alla quale si trova il corpo.

Della massa e dell'accelerazione di gravità abbiamo già parlato approfondendo la (3.1).

La **quota** (h) è la grandezza che misura la distanza verticale che separa il corpo dalla minima quota che può raggiungere, detta "*livello di riferimento*". Di norma il livello di riferimento delle quote sulla terra è il livello del mare (in realtà il livello medio, dato che il livello effettivo varia a causa delle maree) ma si può prendere a riferimento qualunque livello comodo per compiere le misure. Essendo una distanza si misura in metri, con il metro.

Diremo quindi che "**un sistema in cui un corpo di massa *m* è posto in prossimità della superficie terrestre, possiede un'energia potenziale gravitazionale pari al prodotto della massa del corpo per l'accelerazione di gravità *g*, per la quota *h* alla quale il corpo si trova**".

3.1.2 - L'energia potenziale elastica.

Si consideri ora una molla. La molla è un corpo elastico, ovvero un corpo che tende a mantenere la propria forma, nel caso delle molle cilindriche la propria lunghezza, producendo una forza, detta "*forza di richiamo*" o "***forza elastica***", che ha la caratteristica di essere una forza conservativa. La molla è un caso particolare in cui la forza di richiamo verifica la relazione:

$$\boldsymbol{F}_e = -k\cdot\boldsymbol{\Delta l}; \quad (3.4)$$

detta legge di Hooke (poiché determinata da Robert Hooke, 1635-1703, fisico, biologo, geologo ed architetto inglese), in cui k è la sua rigidità, e $\boldsymbol{\Delta l}$ è la deformazione subita.

Vediamo in dettaglio le grandezze coinvolte.

La **rigidità** o **costante elastica** (*k*) è la grandezza che caratterizza la molla nella fase di deformazione elastica e rappresenta l'intensità della forza elastica prodotta dalla molla per ogni metro di deformazione. Essa si misura, quindi, in newton al metro (N/m).

La **deformazione** (Δl) rappresenta la variazione di lunghezza della molla rispetto alla lunghezza a riposo, ovvero la lunghezza che la molla assume quando non è soggetta a sollecitazioni. Si misura in metri e si ottiene come differenza fra la lunghezza della molla sollecitata e quella della molla a riposo, secondo l'equazione:

$$\Delta l = l - l_0; \quad (3.5)$$

nella quale con l abbiamo indicato la lunghezza attuale della molla e con l_0 la lunghezza della molla a riposo.

Il segno della (3.4) è in accordo con l'esperienza: in quanto corpo elastico, infatti, una molla tende sempre a riprendere la propria forma, quindi se la allunghiamo cerca di accorciarsi e viceversa. La forza elastica prodotta è dunque una grandezza con una geometria che è data dalla direzione dell'asse della molla e dal verso nel quale la forza si produce, ovvero dalla stessa direzione della deformazione ma nel verso opposto. Forze e deformazioni sono, dunque, grandezze vettoriali ed il segno ci dice che la forza elastica è '*controversa*' alla deformazione.

Quando in un sistema è presente una molla questa può interagire con altri elementi del sistema venendo deformata e/o tornando alla propria lunghezza naturale. I cambiamenti prodotti nel sistema corrispondono ad altrettanti cambiamenti delle forme di energia presenti. La forza elastica, in quanto forza conservativa, causa la presenza di una forma di energia potenziale detta **energia potenziale elastica** che verifica la relazione:

$$E_e = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l^2; \quad (3.6)$$

nella quale i simboli hanno il medesimo significato che avevano nella (3.4).

Diremo quindi che "**un sistema comprendente un corpo elastico di rigidità** ***k*****, che rispetti la legge di Hooke, possiede un'energia potenziale elastica pari al prodotto di metà della rigidità del corpo elastico per il quadrato della sua deformazione** Δl.

Due sono i limiti di validità della (3.6): il primo è relativo al fatto che non tutti i corpi elastici rispettano la legge di Hooke, il secondo è relativo al fatto che tutti i corpi elastici, anche quelli che rispettano la legge di Hooke, hanno un limite di deformabilità elastica detto "*deformazione di snervamento"*, superato il quale entrano nella *zona di deformazione plastica*, ovvero si deformano senza più essere in grado di riprendere la forma originale, ed una deformazione massima detta "*deformazione di rottura*", raggiunta la quale la molla si rompe.

In sostanza, superata la deformazione di snervamento, l'energia trasmessa alla molla per deformarla ulteriormente si trasforma in energia termica o energia di rottura di legami chimici e non può più essere restituita al sistema come energia meccanica.

3.2 - L'energia cinetica.

Come abbiamo detto, **l'energia cinetica è l'energia posseduta da un sistema per il fatto che una sua parte è in moto rispetto al resto del sistema**.

Vediamo come è possibile calcolare l'energia cinetica posseduta da un corpo.

3.2.1 - La forma generale dell'energia cinetica.

L'energia cinetica ha una forma generale non proprio comoda da utilizzare. Essa, infatti, è descritta dall'equazione:

$$E_c = m \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1); \; (3.7.1)$$

nella quale *m* è la massa della parte del sistema in moto, *c* è la velocità della luce nel vuoto (pario a circa 300.000.000 m/s) e γ è il "*fattore di Lorentz*" (dal nome di Hendrik Antoon Lorentz, 1853-1928, fisico olandese che lo ha determinato durante i suoi studi sull'elettromagnetismo) descritto dall'equazione:

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \; ; (3.7.2)$$

nella quale β è la velocità '*normalizzata*' della parte del sistema in moto (ovvero espressa in multipli della velocità della luce) definita come:

$$\beta = v / c; \; (3.7.3)$$

nella quale *v* è la velocità della parte del sistema in moto.

Le velocità rappresentano la rapidità con cui un corpo si sposta rispetto ad un riferimento fisso e, nel Sistema Internazionale, si misurano in metri al secondo (m/s).

Questa formula ha un solo limite di applicabilità: la velocità della parte del sistema in moto non può essere maggiore della velocità della luce. Questo limite, però, non inficia la generalità dell'equazione poiché, in effetti, **nessun corpo può superare la velocità della luce**.

3.2.2 - La forma approssimata per basse velocità dell'energia cinetica.

Le (3.7) sono equazioni sempre valide, almeno entro i limiti di validità della teoria della relatività ristretta. Purtroppo però la loro complessità ne rende difficile l'utilizzo.

Fortunatamente **esiste una buona approssimazione** della forma generale **valida per velocità normalizzate minori di 1/10** che garantisce risultati **con un errore massimo minore dell'uno percento** ed ha il vantaggio di essere estremamente semplice rispetto alla forma generale.

Essa si esprime nell'equazione:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2; \text{ (3.8)}$$

nella quale m è la massa della parte del sistema in moto e v è la sua velocità.

Possiamo quindi dire che "**un sistema in cui una sua parte, di massa *m*, si muova ad una velocità *v* inferiore a *c/10*, rispetto al resto del sistema, possiede un'energia cinetica pari al prodotto della metà della sua massa per il quadrato della sua velocità**".

Notiamo subito che la condizione di validità della (3.8), velocità normalizzate minori di 1/10, equivale a dire che:

$$v < c/10 = (3 \cdot 10^8 \ m/s)/10 = 3 \cdot 10^7 \ m/s; \text{ (3.9)}$$

ovvero velocità minori di trenta milioni di metri al secondo.

3.2.3 - La velocità di un corpo.

La **velocità di un corpo** si definisce come la **misura della distanza percorsa dal corpo in un'unità di tempo**. Essa può essere misurata e/o calcolata come **velocità media** o come **velocità istantanea**.

La **velocità media** è il **rapporto fra la distanza totale percorsa ed il tempo impiegato a percorrerla**. Per esempio, la velocità media di un motociclista in un giro di pista di un dato circuito è il rapporto fra la lunghezza del circuito ed il tempo impiegato per farvi un giro completo. È tuttavia evidente che il nostro motociclista non si muove lungo la pista sempre con la stessa velocità: a cambiare lungo il percorso è la **velocità istantanea**, ovvero il **rapporto fra la distanza percorsa in un intervallo di tempo molto breve e la durata di tale breve intervallo di tempo**. Quanto breve? Abbastanza breve da fare in modo che la variazione della velocità nell'intervallo di tempo considerato sia trascurabile: se è sufficiente un intervallo di tempo di un decimo di secondo per una buona misura di velocità istantanea di una barca a remi sono necessari intervalli di tempo di un millesimo di secondo per una buona misura della velocità istantanea di una motocicletta da gara.

Quindi, la **velocità media** risponde alla relazione:

$$v = s/t; \text{ (3.10.1)}$$

dove s è lo spostamento misurato durante l'intervallo di tempo t, mentre la **velocità istantanea** risponde alla relazione:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}/t; \text{ (3.10.2)}$$

dove $\boldsymbol{s}$ è il vettore spostamento misurato nell'intervallo di tempo t.

Concludiamo notando che la **velocità media** è una grandezza **scalare** mentre la **velocità istantanea** è una grandezza **vettoriale**.

3.3 - I joule, i newton e le unità di misura fondamentali.

Se le (3.3), (3.6) e (3.8) rappresentano effettivamente delle energie, allora la loro unità di misura deve essere il joule, dato che, come abbiamo, tutte le energie si misurano in Joule.

Se nelle (3.3) e (3.8) sostituiamo alle grandezze le loro unità di misura, determiniamo le seguenti relazioni fra unità di misura:

$$[J = kg \cdot m/s^2 \cdot m = kg \cdot m^2/s^2]; \quad (3.11.1)$$

e

$$[J = kg \cdot (m/s)^2 = kg \cdot m^2/s^2]; \quad (3.11.2)$$

che portano al medesimo risultato, ossia, la composizione dell'unità di misura dell'energia nelle unità di misura delle grandezze fondamentali. Un joule è quindi equivalente ad un chilogrammo per un metro quadrato fratto un secondo quadrato.

Se facciamo la medesima operazione partendo dalla (3.6) troviamo la seguente relazione fra unità di misura:

$$[J = N/m \cdot m^2 = N \cdot m]; \quad (3.11.3)$$

che risulta corrispondente alle (3.11.1) e (3.11.2) se consideriamo valida l'equivalenza:

$$[N = kg \cdot m/s^2]. \quad (3.12)$$

Possiamo verificare la (3.12) considerando la (3.1) e sostituendo alle grandezze le loro unità di misura. Otteniamo:

$$[N = kg \cdot m/s^2]; \quad (3.12)$$

ovvero il medesimo risultato ottenuto in precedenza, ossia, la composizione dell'unità di misura della forza nelle unità di misura delle grandezze fondamentali. Un newton è quindi equivalente ad un chilogrammo per un metro fratto un secondo quadrato. Dunque, fra joule e newton c'è giusto un metro di differenza!

3.E - Esercizi.

3.E.1 - Un ciclista sta percorrendo un tratto di un circuito di montagna alla velocità di 15 m/s. Ad un tratto inizia una salita ed il ciclista decelera sotto la sola azione della forza di gravità. Se la massa totale del ciclista e della sua bicicletta è di 100 kg, e il dislivello fra i due estremi del tratto in salita è di 10 m, si dica:

a - quanto vale l'energia cinetica iniziale;
b - quanto vale l'energia potenziale iniziale;
c - quanto vale l'energia totale iniziale;
d - quanto vale l'energia totale finale;
e - quanto vale l'energia potenziale finale;
f - quanto vale l'energia cinetica finale;
g - quanto vale la velocità finale.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 11250 J; b: 0 J; c: 11250 J; d: 11250 J; e: 9800 J; f: 1450 J; g: 5,4 m/s]

3.E.2 - La fune di un ascensore si rompe mentre la cabina sta scendendo con una velocità di 0,2 m/s. Arrivata a terra dopo un volo di 20 m, la cabina si frantuma. Considerando che la massa della cabina è di 200 kg si dica:

a - quanto vale l'energia cinetica iniziale;
b - quanto vale l'energia potenziale iniziale;
c - quanto vale l'energia totale iniziale;
d - quanto vale l'energia totale finale;
e - quanto vale l'energia potenziale finale;
f - quanto vale l'energia cinetica finale;
g - quanto vale la velocità finale.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 4 J; b: 39200 J; c: 39204 J; d: 39204 J; e: 0 J; f: 39204 J; g: 19,8 m/s]

3.E.3 - Homer Simpson scopre che la sua pancia è un corpo elastico che rispetta la legge di Hooke e decide di usare questa scoperta per dare una lezione a suo figlio Bart: quando questo riproverà a rompere il vetro della finestra usando la fionda, aprirà la finestra ed userà la pancia per rimandargli il sasso e colpirlo.
Sapendo che l'energia potenziale elastica iniziale della pancia di Homer è 0 J e che il sasso lanciato da Bart, dalla quota di 1 m, ha massa di 0,2 kg, viaggia alla velocità di 10 m/s e si infila nella pancia di Homer alla quota di 1,5 m, si dica:

a - quanto vale l'energia totale del sistema al momento del lancio;
b - quanto vale l'energia totale del sistema quando il sasso si è fermato nella pancia;
c - quanto vale l'energia cinetica del sistema quando il sasso è fermo nella pancia di Homer;
d - quanto vale l'energia potenziale gravitazionale del sistema quando il sasso è fermo nella pancia di Homer;
e - quanto vale l'energia potenziale elastica del sistema prodotta dall'interazione fra pancia di Homer e sasso;
f - quanto vale la rigidità della pancia di Homer se il sasso penetra per 20 cm;
g - quanto vale l'energia totale del sistema quando il sasso esce dalla pancia di Homer;
h - quanto vale l'energia potenziale elastica quando il sasso esce dalla pancia di Homer;
i - quanto vale l'energia potenziale gravitazionale quando il sasso esce dalla pancia di Homer;
j - quanto vale l'energia cinetica quando il sasso esce dalla pancia di Homer;
k - quanto vale la velocità con cui il sasso esce dalla pancia di Homer sapendo che sasso e pancia hanno la stessa velocità e la massa della pancia in moto è di 17,84 kg;
l - quanto vale l'energia che rimane intrappolata nella pancia di Homer.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 11,96 J; b: 11,96 J; c: 0 J; d: 2,94 J; e: 9,02 J; f: 451 N/m; g: 11,96 J; h: 0 J; i: 2,94 J; j: 9,02 J; k: 1 m/s; l: 8,92 J]

3.E.4 - L'Uomo ragno da un tetto vede un rapinatore nella via e gli si lancia addosso, appeso alla ragnatela come tarzan, dalla quota di 30 m con una velocità iniziale di 2 m/s. Sapendo che la massa dell'Uomo ragno è 100 kg si dica:

a - quanto vale l'energia totale al momento del lancio;
b - a quale velocità piomba addosso al malfattore se lo colpisce ad 1,5 m da terra.

Mentre l'eroe mascherato scende dal tetto un grosso camion, passando per strada, si frappone fra lui ed il rapinatore e lui lo attraversa lasciando due buchi con la propria sagoma sui due lati del cassone. Sapendo che, dopo l'urto, alla quota di 2 m, la sua velocità residua è di 10 m/s, si dica:

c - quanto vale l'energia totale del sistema subito dopo l'urto;
d - quale nuova forma di energia è coinvolta e quanto vale;
e - con quale velocità l'Uomo ragno si schianterà a terra ai piedi del rapinatore.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 29600 J; b: 23,7 m/s]

4 - Il lavoro di una forza.

Nel paragrafo 2.1 abbiamo definito l'energia come la misura del lavoro che un sistema è in grado di compiere.

Ora ci chiariremo le idee riguardo al significato fisico di quella definizione andando a vedere cosa si intenda in Fisica con il termine lavoro.

4.1 - Forza... al lavoro.

Non tutto ciò che comunemente chiamiamo lavoro è lavoro per la Fisica: in Fisica, infatti, qualunque impegno che non possa essere misurato in termini di energia necessaria per essere assolto non può essere considerato lavoro. Questo perché la forza, e nel contempo il limite, della disciplina, consistono nella necessità di produrre modelli matematici per descrivere la realtà in esame. Dunque in Fisica si parla soltanto di lavoro effettuato da una forza e si dice che:

il lavoro, compiuto da una forza *F* su di un corpo *c*, è il prodotto scalare della forza *F* per lo spostamento *s* del corpo *c*.

Il lavoro si misura in Joule, come le energie, pur non essendo un'energia. La definizione introduce la relazione algebrica:

$$L = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{s}. \quad (4.1)$$

Ora ragioniamo sulle definizioni. Prima di tutto, riprendendo la definizione di energia, ci rendiamo subito conto che quando una forza compie lavoro, si riduce la quantità di lavoro che essa può ancora compiere. Se, quindi, osserviamo una forza conservativa compiere del lavoro avremo che il lavoro compito è energia potenziale che cambia forma. Se la forza non è conservativa sappiamo che il lavoro compiuto è energia meccanica che viene trasformata in energia termica. In ogni caso, dato che l'energia non si crea né si distrugge ma si trasforma, possiamo dire che "***il lavoro delle forze è la grandezza che misura le quantità di energia che cambiano forma***".

Il prodotto scalare è un prodotto fra vettori che restituisce un numero, uno scalare. Il risultato di questo prodotto dipende dai valori e dalla geometria dei vettori forza e spostamento. Si osserva, infatti, con estrema facilità che una forza non può, ad esempio, produrre alcun risultato se agisce su un corpo che non può spostarsi nella direzione della forza. Per esempio, un lampadario non può subire lavoro dalla forza peso poiché non può muoversi in verticale (a meno che la catena che lo lega al soffitto non si rompa) e, pur essendo libero di muoversi in orizzontale non lo fa nonostante l'azione della forza peso. Dato che due direzioni perpendicolari sono completamente indipendenti **il prodotto scalare di due vettori perpendicolari fra loro è nullo**. Se invece i vettori hanno la stessa direzione, il risultato del prodotto dipende esclusivamente dai moduli e dai versi. **Il prodotto scalare di due vettori paralleli ed equiversi è pari al prodotto dei loro moduli**, mentre **il prodotto scalare di due vettori paralleli e controversi è pari all'opposto del prodotto dei loro moduli**. Per ulteriori approfondimenti si rimanda all'appendice A3.

4.2 - Lavoro ed energie potenziali.

Consideriamo ora di avere un corpo sottoposto all'azione di una delle forze conservative che abbiamo visto ed, applicando la definizione dell'energia, proviamo ad ottenere le equazioni delle energie potenziali calcolando il lavoro che sono in grado di compiere.

4.2.1 - Lavoro ed energia potenziale gravitazionale.

Dalla definizione dell'energia possiamo dire che l'energia potenziale gravitazionale posseduta dal sistema terra-corpo è pari al massimo lavoro che può compiere sul corpo la forza peso, quando il corpo è in prossimità della superficie terrestre. Applicando quindi la (4.1), la definizione di lavoro, alla (3.1), l'equazione della forza peso, ricaviamo la seguente equazione:

$$E_p = L_{p\,max} = \boldsymbol{F}_p \times \boldsymbol{s}_{max} = m \cdot \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{s}_{max}; \; (4.2.1)$$

nella quale m è la massa del corpo, $\boldsymbol{g}$ il vettore accelerazione di gravità ed $\boldsymbol{s}_{max}$ è il vettore spostamento che rende massimo il prodotto scalare. Per quanto detto nel paragrafo 4.1, il prodotto scalare è massimo quando lo spostamento è il massimo possibile nella direzione e nel verso della forza peso, ovvero in verticale verso il basso. Questo è pari alla distanza del corpo da terra e, quindi, ricaviamo che la (4.2.1) si può completare in questo modo:

$$E_p = L_{p\,max} = \boldsymbol{F}_p \times \boldsymbol{s}_{max} = m \cdot \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{s}_{max} = m \cdot g \cdot h; \; (4.2.2)$$

da cui otteniamo la (3.3).

4.2.1 - Lavoro ed energia potenziale elastica.

Se applichiamo la (4.1), la definizione di lavoro, alla (3.4), l'equazione della forza elastica, ricaviamo la seguente equazione:

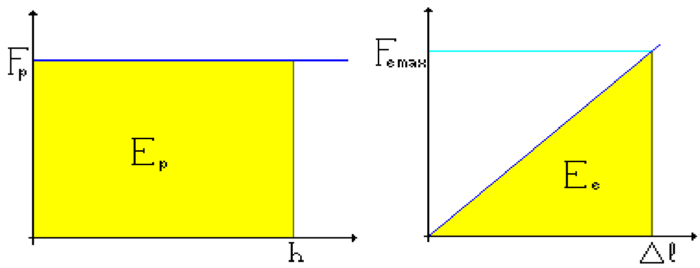
$$E_e = L_{e\,max} = \int_{\boldsymbol{s}_{max}} \boldsymbol{F}_e \times \boldsymbol{\delta s} = k \cdot \int_{\boldsymbol{s}_{max}} (l-l_0) \cdot \delta l; \; (4.3.1)$$

nella quale k è la rigidità del corpo, $(l-l_0)$ è la sua deformazione, δl è uno spostamento infinitesimo nella direzione della deformazione della molla ed il simbolo $\int_{\boldsymbol{s}_{max}}$, integrale, indica la necessità di calcolare un'area. Quale area? Le (4.2) possono essere ancora sviluppate fino ad ottenere:

$$E_p = L_{p\,max} = \boldsymbol{F}_p \times \boldsymbol{s}_{max} = m \cdot \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{s}_{max} = m \cdot g \cdot h = F_p \cdot h \; ; \; (4.2.3)$$

ovvero il prodotto fra la forza peso, costante rispetto alla posizione del corpo, e lo spostamento massimo, ad essa parallelo ed equiverso, che il corpo può compiere sotto l'azione della forza peso.

Volendo interpretare la (4.2.3) come il calcolo di un'area dobbiamo disegnare il grafico della forza peso sul piano forza-spostamento: otteniamo una retta parallela all'asse degli spostamenti, che sottende un'area rettangolare di altezza pari ad F_p e di base pari ad h.



Se realizziamo lo stesso grafico per la forza elastica, il cui modulo è direttamente proporzionale allo spostamento di una estremità del corpo elastico rispetto all'altra, ovvero alla deformazione, otteniamo una retta passante per l'origine, dato che per spostamenti nulli la forza prodotta è nulla. L'area sottesa sarà quindi quella di un triangolo di altezza pari alla forza elastica massima e di base pari alla deformazione che produce tale forza, ovvero:

$$E_e = L_{e\,max} = \int_{s_{max}} \boldsymbol{F}_e \times \boldsymbol{\delta s} = \frac{1}{2} F_e\cdot(\Delta l) = \frac{1}{2} k\cdot\Delta l\cdot(\Delta l) = \frac{1}{2} k\cdot\Delta l^2; \quad (4.3.2)$$

cioè la (3.6). È ovvio che, per corpi elastici che non verifichino la (3.4), la legge di Hooke, la forma assunta dall'energia potenziale elastica risulta più complessa poiché sarà l'area di una figura geometrica più complessa.

4.3 - Lavoro ed energia cinetica.

Mentre per le energie potenziali è possibile calcolare il lavoro che possono compiere le forze conservative che le generano, per l'energia potenziale questo non è possibile. Tuttavia esiste una legge fondamentale che lega l'energia cinetica ed il lavoro delle forze: si chiama "***teorema dell'energia cinetica***".

4.3.1 - Il teorema dell'energia cinetica.

Alla fine del paragrafo 4.1, abbiamo ragionato sulle implicazioni della definizione di energia e del principio di conservazione.

Abbiamo notato che una forza conservativa che compie lavoro va a ridurre il lavoro che è ancora in grado di compiere, ovvero l'energia potenziale ad essa associata. Se, ad esempio, consideriamo un corpo in caduta, il sistema corpo-terra perde energia potenziale gravitazionale ma acquista energia cinetica. Il lavoro compiuto, positivo, misura l'energia potenziale persa e, quindi, l'energia cinetica guadagnata.

Abbiamo osservato, anche, che il lavoro compiuto da una forza dissipativa, come l'attrito, aumenta l'energia termica del sistema. Se, ad esempio, un'auto frena, i freni si riscaldano per l'aumento di energia termica prodotto dall'attrito fra pastiglie e dischi dei freni e l'energia termica viene prodotta trasformando l'energia cinetica del sistema. Il lavoro compiuto, negativo, misura l'energia termica guadagnata e, quindi, l'energia cinetica persa.

Il paracadutista, cade a velocità costante quando l'attrito con l'aria compie un lavoro opposto a quello compiuto dalla forza peso, ovvero quando l'aumento di energia cinetica dovuto alla trasformazione dell'energia potenziale è compensato da una riduzione dovuta all'attrito con l'aria. Il lavoro totale compiuto, nullo, misura l'energia che viene trasformata in energia cinetica.

Da tutte queste osservazioni deriva il **teorema dell'energia cinetica**:

$$\Delta E_c = L_{tot}; \; (4.4)$$

nella quale ΔE_c è la variazione di energia cinetica del sistema ed L_{tot} è il lavoro totale compiuto sul corpo in moto nel sistema.

4.3.2 - I moti uniformi.

Si consideri ora un sistema in cui un corpo si muova e l'energia cinetica risulti costante.

Per prima cosa, ricordando la (3.8), possiamo osservare che, affinché l'energia cinetica risulti costante, deve essere costante il modulo della velocità del corpo.

Per il teorema dell'energia cinetica, inoltre, avremo che, affinché l'energia cinetica risulti costante, dovrà risultare nulla la sua variazione ovvero, per la (4.4):

$$\Delta E_c = L_{tot} = 0\ J; \; (4.5.1)$$

ovvero:

$$L_{tot} = L_1+L_2+...+L_n = \boldsymbol{F_1} \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{F_2} \times \boldsymbol{s} +...+ \boldsymbol{F_n} \times \boldsymbol{s} = (\boldsymbol{F_1}+\boldsymbol{F_2}+...+\boldsymbol{F_n}) \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{F_{tot}} \times \boldsymbol{s} = 0\ J; \; (4.5.2)$$

dalla quale si ricava che, essendo lo spostamento non nullo dato che il corpo è in moto, deve essere verificata una delle due condizioni seguenti:

$$\boldsymbol{F_{tot}} = 0\ N; \; (4.6)$$

nota come **condizione di equilibrio delle forze**, oppure:

$$\boldsymbol{F_{tot}} \perp \boldsymbol{s}; \; (4.7)$$

nella quale il simbolo $\perp$ indica la perpendicolarità della forza totale, o risultante, rispetto allo spostamento del corpo.

Esaminiamo separatamente e nel dettaglio i due casi.

4.3.3 - Forza agente nulla: il moto rettilineo uniforme e l'equilibrio statico

La (4.6) indica che il corpo è soggetto all'azione di forze la cui somma è nulla. È evidente che, in questo caso, anche se ci fossero delle forze che compiono un lavoro non nullo, la somma dei lavori compiuti dalle forze agenti dovrà essere nulla, come sottolinea la (4.5.2).

Gli esempi più semplici sono quelli nei quali abbiamo solo due forze agenti nella direzione del moto: è il caso della cabina dell'ascensore, sia in salita che in discesa. La cabina dell'ascensore, infatti, sia durante il moto di salita che durante quello di discesa, mantiene costante la propria velocità grazie all'azione del motore che, generando una forza che chiameremo **forza motrice** ($\boldsymbol{F}_m$), annulla il lavoro compiuto dalla forza peso della cabina. In formule:

$$L_{tot} = L_p+L_m = \boldsymbol{F}_p \times \boldsymbol{s}+\boldsymbol{F}_m \times \boldsymbol{s} = (\boldsymbol{F}_p+\boldsymbol{F}_m) \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}_{tot} \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}\ N \times \boldsymbol{s}\ m = 0\ J; \quad (4.8)$$

ovvero:

$$\boldsymbol{F}_m+\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{0}\ N \Leftrightarrow \boldsymbol{F}_m = -\boldsymbol{F}_p. \quad (4.9)$$

Esempi poco più complessi sono quelli nei quali abbiamo due forze agenti nella direzione del moto e due agenti nella direzione ad essa perpendicolare: è il caso di un'auto (o di un qualunque altro mezzo) che viaggi a velocità costante lungo un tratto di strada piano e rettilineo. Come nel precedente, anche in questo abbiamo due sole forze nella direzione del moto: la forza motrice e la **forza d'attrito viscoso** che si genera dall'interazione fra l'auto l'aria e risponde alla relazione:

$$\boldsymbol{F}_a=-\alpha\cdot\boldsymbol{v}; \quad (4.10)$$

che ci dice che la forza d'attrito viscoso $\boldsymbol{F}_a$, agente su di un corpo che si muove in un fluido, è opposta al prodotto del coefficiente d'attrito viscoso α per la velocità del corpo $\boldsymbol{v}$.

Contrariamente al caso precedente, in questo caso ci sono anche due forze che agiscono in direzione perpendicolare alla direzione del moto: la forza peso, che preme il veicolo contro l'asfalto, e la **forza vincolare** (o reazione vincolare, $\mathbf{F}_v$), forza sempre perpendicolare al vincolo, che si genera dall'interazione fra l'auto e l'asfalto, il vincolo. In questo caso, quindi, avremo:

$$L_{tot} = L_p+L_v+L_a+L_m = \boldsymbol{F}_p \times \boldsymbol{s}+\boldsymbol{F}_v \times \boldsymbol{s}+\boldsymbol{F}_a \times \boldsymbol{s}+\boldsymbol{F}_m \times \boldsymbol{s} =$$
$$= ((\boldsymbol{F}_p+\boldsymbol{F}_v)+(\boldsymbol{F}_a+\boldsymbol{F}_m)) \times \boldsymbol{s} = (\boldsymbol{F}_\perp+\boldsymbol{F}_{//}) \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}_{tot} \times \boldsymbol{s} = 0\ J; \quad (4.11)$$

dato che:

$$\boldsymbol{F}_\perp = \boldsymbol{F}_v+\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{0}\ N \Leftrightarrow \boldsymbol{F}_v = -\boldsymbol{F}_p; \quad (4.12.1)$$

e

$$\boldsymbol{F}_{//} =\boldsymbol{F}_a+\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{0}\ N \Leftrightarrow \boldsymbol{F}_a = -\boldsymbol{F}_m; \quad (4.12.2)$$

dove la (4.12.1) rappresenta l'equilibrio delle forze che agiscono perpendicolarmente al moto mentre la (4.12.2) rappresenta l'equilibrio delle forze che agiscono parallelamente a questo.

Per un corpo fermo la (4.6) implica, per il teorema dell'energia cinetica, la conservazione dell'energia cinetica, nulla, del corpo considerato. Ma, se il corpo è inizialmente fermo, l'energia cinetica si conserva anche in assenza di equilibrio delle forze?

In effetti no. Come vedremo in dettaglio parlando della dinamica, se sul corpo agisce una forza totale non nulla il corpo accelera, ovvero varia la propria velocità, che quindi non sarà più nulla. Di conseguenza il corpo inizierà a spostarsi permettendo alla forza totale, agente su di esso, di compiere lavoro.

In conclusione **un corpo rimane fermo solo se è in equilibrio statico, ovvero se è fermo e soggetto a forze all'equilibrio**. In questo senso un corpo fermo può essere visto come un corpo che si muove con velocità nulla ed in condizione di equilibrio delle forze.

4.3.4 - Forza agente perpendicolare al moto: i moti vari uniformi.

La (4.7) indica che il corpo in moto è soggetto all'azione di forze la cui somma è perpendicolare alla direzione del moto. In questo caso, nonostante abbiano somma non nulla, le forze agenti compiono un lavoro nullo sul corpo.

In queste condizioni succede che il modulo della velocità del corpo rimane costante, ma **varia continuamente la direzione del moto** che si curva nel verso in cui agisce la forza totale, che, per questo, viene detta '***centripeta***', ovvero **diretta verso il centro della curva**.

La velocità istantanea, essendo una grandezza vettoriale, non può dunque dirsi costante, poiché la sua direzione è una caratteristica sostanziale di un vettore. Per descrivere questa situazione si dice che, **la velocità è uniforme**. Il più semplice moto di questo tipo è il moto circolare uniforme.

Se la **forza centripeta è uniforme** è uniforme anche la curvatura della traiettoria del corpo. In questo caso, quindi, viene a formarsi un moto che passa attraverso una serie di punti posti a distanza costante dal centro di curvatura della traiettoria che risulta, quindi, lo stesso per tutta la durata del moto. In breve il moto risulta circolare e con velocità uniforme: abbiamo un **moto circolare uniforme**.

Notiamo subito che su un corpo in moto circolare uniforme non agiscono forze tali da spingerlo lontano dal centro della traiettoria (dette, per questo, *centrifughe*): semplicemente, se improvvisamente viene a mancare la forza centripeta (ad esempio: un'auto in curva che passa su una lastra di ghiaccio e comincia a scivolare), il corpo smette di curvare e prosegue con un moto rettilineo uniforme nella direzione che aveva nell'istante in cui la forza centripeta è venuta a mancare.

4.E - Esercizi.

4.E.1 - Si calcoli il lavoro compiuto dalle forze in elenco su di un corpo che compie uno spostamento verticale di 10 m verso l'alto:

a - una forza verticale, rivolta verso l'alto, di intensità pari a 20 N;
b - una forza verticale, rivolta verso il basso, di intensità pari a 5 N;
c - una forza orizzontale, rivolta verso destra, di intensità pari a 3 N;
d - una forza orizzontale, rivolta verso sinistra, di intensità pari a 10 N.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 200 J; b: -50 J; c: 0 J; d: 0 J]

4.E.2 - Dopo averle disegnate, si calcoli il lavoro compiuto in ciascuna delle seguenti situazioni:

a - una forza di componenti Fx = 3 N ed Fy = 5 N agente su di un corpo che compie uno spostamento di componenti sx = 3 m ed sy = 5 m;
b - una forza di componenti Fx = 5 N ed Fy = 3 N agente su di un corpo che compie uno spostamento di componenti sx = 3 m ed sy = 5 m;
c - una forza di componenti Fx = -3 N ed Fy = 5 N agente su di un corpo che compie uno spostamento di componenti sx = 3 m ed sy = -5 m;
d - una forza di componenti Fx = 3 N ed Fy = -3 N agente su di un corpo che compie uno spostamento di componenti sx = 5 m ed sy = 5 m;

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 34 J; b: 30 J; c: -30 J; d: 0 J]

4.E.3 - Un'automobile, con massa di 1500 kg, viaggia lungo un'autostrada. Si dica:

a - quanto lavoro compie la forza peso in un tratto piano di 100 m;
b - quanto lavoro compie la forza peso in un tratto in discesa di 100 m con un dislivello di 10 m;
c - quanto lavoro compie la forza motrice di 1000 N in un tratto piano di 100 m;
d - quanto lavoro compie la forza motrice di 1000 N in un tratto in discesa di 100 m con un dislivello di 10 m.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 0 J; b: 147000 J; c: 100 kJ; d: 100 kJ]

4.E.4 - Un ascensore, con massa di 300 kg, sale dal secondo al decimo piano. Sapendo che ogni piano è alto 3 m, si dica:

a - quanto vale e quanto lavoro compie la forza peso;
b - quanto lavoro compie la forza motrice se è opposta alla forza peso;
c - quanto vale il lavoro totale compiuto dalle forze sull'ascensore.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: -70560 J; b: 70560 J; c: 0 J]

4.E.5 - Un uomo cammina reggendo una valigia con massa di 5 kg. Quanto lavoro compie su uno spostamento orizzontale di 100 m se la forza prodotta è costantemente opposta alla forza peso della valigia? E quanto lavoro compie se per ogni passo (si considerino passi di 1 m) la valigia oscilla in verticale di 20 cm e la forza prodotta per tenerla è in modulo il doppio della forza peso nella fase di salita ed è nulla nella fase di discesa?
Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[0 J; 1960 J]

4.E.6 - Un trolley viene trascinato lungo una strada piana e rettilinea. Sapendo che la forza motrice ha intensità di 5 N e che il lavoro compiuto dalla sua componente orizzontale in uno spostamento di 5 m è di 20 J, si dica:

a - quanto vale la componente orizzontale della forza motrice;
b - quanto vale la componente verticale della forza motrice;
c - quanto lavoro compie la componente verticale della forza motrice.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 4 N; b: 3 N; c: 0 J]

4.E.7 - Un'automobile di massa 1000 kg viaggia lungo un tratto di strada piano e rettilineo alla velocità costante di 50 m/s. Con riferimento ad uno spostamento di 100 m si dica:

a - quanto vale e quanto lavoro compie la forza peso;
b - quanto lavoro compie la forza motrice di 1500 N;
c - quanto lavoro compie la forza d'attrito viscoso;
d - quanto vale la forza d'attrito viscoso;
e - quanto vale il coefficiente d'attrito viscoso.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 9800 N, b: 0 J; 150000 J; c: -150000 J; d: -1500 N; e: 30 N/(m/s)]

4.E.8 - Un corridore di massa 100 kg percorre il primo tratto di pista di 25 m portando la propria velocità a 10 m/s. Considerando trascurabile la forza d'attrito si dica:

a - quanto vale l'energia cinetica del corridore ai blocchi di partenza;
b - quanto vale il lavoro totale compiuto dalle forze;
c - quanto vale e quanto lavoro compie la forza peso;
d - quanto vale e quanto lavoro compie la forza vincolare;
e - quale altra forza agisce e quanto vale.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 0 J; b: 5000 J; c: 980 N, 0 J; d: -980 N, 0 J; e: 200 N]

4.E.9 - Il corridore del problema precedente percorre il rimanente tratto di pista di 75 m a velocità costante. Considerando trascurabile la forza d'attrito si dica:

a - quanto vale il lavoro totale compiuto dalle forze;
b - quanto vale e quanto lavoro compie la forza peso;
c - quanto vale e quanto lavoro compie la forza vincolare;
d - quanto vale l'altra forza agente.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 0 J; b: 980 N, 0 J; c: -980 N, 0 J; d: 0 N]

4.E.10 - Un astronauta di massa 150 kg, equipaggiamento compreso, si trova su di un pianeta sconosciuto. Se cadendo da fermo da una quota di 25 m porta la propria velocità a 5 m/s, considerando trascurabile la forza d'attrito, si dica:

a - quanto vale il lavoro totale compiuto dalle forze;
b - quali forze agiscono sull'astronauta;
c - quanto lavoro compie la forza peso dell'astronauta;
d - quanto vale la forza peso dell'astronauta;
e - quanto vale l'accelerazione di gravità sul pianeta sconosciuto.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 1875 J; c: 1875 J; d: 75 N; e: 0,5 m/s²]

4.E.11 - Un'automobile di massa 1200 kg si schianta contro un palo e si deforma accorciandosi, nel punto di contatto, di 1 m. Sapendo che la velocità dell'auto era di 14 m/s (circa 50 km/h) e che l'auto muoveva lungo un tratto di strada piano e rettilineo, si dica:

a - quanto vale e quanto lavoro compie la forza peso;
b - quanto lavoro compie la forza generata dall'urto col palo;
c - quanto vale la forza generata dall'urto col palo.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 11760 N, 0 J; b: 117600 J; c: 117600 N]

4.E.12 - Un'automobile di massa 1200 kg percorre una curva alla velocità uniforme di 14 m/s. Si dica:

a - quanto lavoro compie la forza totale e perché.

Giustificare la risposta facendo riferimento al testo.

[a: 0 J]

5 - Il tempo: cinematica e potenza.

Fino ad ora abbiamo descritto i fenomeni dal punto di vista dell'energia. In quest'ottica, data la definizione del lavoro, è comodo valutare le grandezze necessarie (energie, velocità, etc.) nello spazio, ma nelle applicazioni pratiche è spesso più utile conoscere il variare delle grandezze fisiche nel tempo.

In questo capitolo impareremo quindi ad osservare i moti nel tempo.

5.1 - Grandezze cinematiche fondamentali.

La cinematica è quella branca della Fisica che si occupa della descrizione semplice dei moti, cioè della descrizione del moto in sé, senza preoccuparsi delle ragioni per le quali il moto risulti essere proprio quello descritto.

Le grandezze necessarie per questo scopo sono: la posizione, la velocità e l'accelerazione.

5.1.1 - Posizione del corpo nel tempo: la traiettoria.

Un corpo può essere descritto come oggetto nello spazio attraverso le coordinate di un punto fondamentale detto **baricentro**. Il baricentro è il punto geometrico nel quale si può considerare concentrata tutta la massa di un corpo.

Un corpo in moto cambia continuamente la propria posizione nel tempo: l'insieme di tutte le posizioni occupate nei vari istanti dal corpo si dice **traiettoria** del corpo.

La traiettoria di un corpo si può descrivere attraverso la sua **legge oraria**, ovvero attraverso la legge:

$$p(t) = f(t); \quad (5.1)$$

nella quale con $p(t)$ abbiamo indicato la generica posizione del corpo nel generico istante di tempo t, mentre con $f(t)$ abbiamo indicato la relazione matematica che lega la posizione occupata dal corpo al tempo t (f rappresenta una funzione, ovvero una relazione matematica che, dato un valore della variabile indicata fra parentesi, detta *variabile indipendente*, restituisce il valore corrispondente, detto quindi *dipendente*).

Una legge oraria è una relazione funzionale che lega ad ogni istante di tempo la posizione che il corpo occupa in quell'istante.

5.1.2 - La velocità istantanea.

Come abbiamo già detto parlando di energia cinetica, la **velocità** ci dice **quanto rapidamente un corpo si sposta**, ovvero di **quanto cambia la posizione di un corpo in una unità di tempo**. La velocità si misura con il tachimetro e la sua unità di misura, nel Sistema Internazionale, è il metro al secondo (m/s).

La velocità istantanea si trova dividendo la distanza percorsa in un intervallo di tempo sufficientemente breve per la durata di tale intervallo di tempo. L'intervallo di tempo considerato deve essere abbastanza breve da fare in modo che la velocità possa considerarsi costante, sia in modulo che in direzione.

Essa risponde alla relazione:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}/t; \quad (5.2.1)$$

ovvero la (3.10.2), dove $\boldsymbol{s}$ è lo spostamento (in forma vettoriale!) misurato nell'intervallo di tempo t, ovvero il vettore che porta dalla posizione iniziale alla posizione finale:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\Delta p} = \boldsymbol{p_f}\text{-}\boldsymbol{p_i}; \quad (5.3)$$

nella quale $\boldsymbol{p_f}$ e $\boldsymbol{p_i}$ sono, rispettivamente, la posizione all'inizio ed alla fine dell'intervallo di tempo t.

La velocità istantanea esprime, quindi, la rapidità con la quale un corpo si sposta in un dato istante e ci permette di scrivere una prima legge valida, in generale, per brevi intervalli di tempo, ovvero finché la velocità istantanea si può considerare costante:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v} \cdot t. \quad (5.2.2)$$

5.1.3 - L'accelerazione istantanea.

Così come è utile descrivere la rapidità con cui un corpo cambia la propria posizione nel tempo, allo stesso modo è utile descrivere la **rapidità con la quale il corpo cambia la propria velocità**.

La grandezza utilizzata in Fisica per esprimere questo concetto è **l'accelerazione**, ovvero **la variazione della velocità di un corpo in una unità di tempo**. L'accelerazione si misura con l'accelerometro e la sua unità di misura, nel Sistema Internazionale, è il metro al secondo quadrato (m/s^2).

L'accelerazione istantanea si trova dividendo la variazione della velocità in un intervallo di tempo sufficientemente breve per la durata di tale intervallo di tempo. Sufficientemente breve significa che l'accelerazione può considerarsi costante, sia in modulo che in direzione, per tutta la durata dell'intervallo di tempo considerato.

Essa risponde alla relazione:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Delta v}/t; \quad (5.4)$$

dove $\boldsymbol{\Delta v}$ è la variazione della velocità misurata nell'intervallo di tempo t, ovvero il vettore che sommato alla velocità iniziale ci da la velocità finale:

$$\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{\Delta v} = \boldsymbol{v}_f; \quad (5.5.1)$$

ovvero:

$$\boldsymbol{\Delta v} = \boldsymbol{v}_f-\boldsymbol{v}_i; \quad (5.5.2)$$

nella quale $\boldsymbol{v}_f$ e $\boldsymbol{v}_i$ sono, rispettivamente, la velocità istantanea all'inizio ed alla fine dell'intervallo di tempo t.

L'accelerazione istantanea ci permette di scrivere due leggi valide, in generale, per brevi intervalli di tempo, ovvero finché l'accelerazione istantanea si può considerare costante.

La prima si ricava sostituendo nella (5.3) la (5.4.2) ed esplicitando rispetto a $\boldsymbol{v}_f$:

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{a}t; \quad (5.5.3)$$

mentre la seconda, come vedremo nel prossimo paragrafo, si ricava dalla (4.4), il teorema dell'energia cinetica:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}_i \cdot t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a} \cdot t^2; \quad (5.6)$$

entrambe valide per la durata dell'intervallo di tempo in cui l'accelerazione può considerarsi costante. Possiamo chiamare la (5.6) "***equazione istantanea del moto***".

5.2 - Dal teorema dell'energia cinetica alla legge del moto.

La legge (5.6) è implicitamente presente nel teorema dell'energia cinetica; è sufficiente ricordare la legge fondamentale della dinamica (3.2) e scrivere per esteso i termini della (4.4):

$$\Delta E_c = L_{tot}; \quad (4.4)$$

diventa quindi:

$$\frac{1}{2}m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_i^2 = \boldsymbol{F}_{tot} \times \boldsymbol{s}; \quad (5.7)$$

ovvero:

$$\frac{1}{2}m \cdot (v_f^2-v_i^2) = m \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}; \quad (5.8)$$

dalla quale, moltiplicando per il suo reciproco, possiamo eliminare la massa, ottenendo:

$$\frac{1}{}(v_f^2-v_i^2) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}; \quad (5.9)$$

2

A questo punto possiamo sostituire, nel primo membro della (5.9), la (5.5.1), ottenendo:

$$\frac{1}{2}((\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{a}\cdot t)^2-v_i^2) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}; \quad (5.10)$$

che, svolto il quadrato, diventa:

$$\frac{1}{2}(v_i^2+2\cdot\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{a}\cdot t+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\cdot t^2-v_i^2) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}; \quad (5.11)$$

da cui, semplificando, otteniamo:

$$\frac{1}{2}(2\cdot\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{a}\cdot t+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\cdot t^2) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}; \quad (5.12)$$

ovvero:

$$\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{a}\cdot t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\cdot t^2 = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}. \quad (5.13)$$

Eliminando da ogni termine della (5.13) un prodotto per **a** otteniamo[1]:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}_i\cdot t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot t^2; \quad (5.6)$$

ovvero l'equazione generale che cercavamo. Vediamola ora declinata ad alcuni casi particolari nei quali, imponendo alcune condizioni non troppo limitanti, può essere estesa a legge oraria, risultando

1 Attenzione: eliminare uno scalare che moltiplichi tutti i termini di un'equazione è facile: basta moltiplicare per il suo reciproco, l'inverso rispetto al prodotto. Eliminare un vettore da dei prodotti scalari non è altrettanto facile: i vettori, infatti, non ammettono reciproci per nessun prodotto e, quindi, non possiamo semplicemente moltiplicare per il reciproco del vettore $\boldsymbol{a}$. Di conseguenza dobbiamo scomporre la (5.13) in due equazioni indipendenti. La prima sarà quella dei componenti paralleli all'accelerazione e diventerà:

$$\boldsymbol{v}_{i//}\times\boldsymbol{a}\cdot t + (1/2)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\cdot t^2 = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}_{//}; \quad (5.13.//.1)$$

che, dato che i prodotti scalari sono tutti fra vettori paralleli, diventa:

$$v_{i//}\cdot a\cdot t + (1/2)a\cdot a\cdot t^2 = a\cdot s_{//}; \quad (5.13.//.2)$$

dalla quale a, diventato scalare, può essere eliminato senza problemi, dando

$$v_{i//}\cdot t + (1/2)a\cdot t^2 = s_{//}. \quad (5.13.//.3)$$

L'altra equazione ricavata dalla (5.13) sarà quella con i componenti perpendicolari all'accelerazione, ovvero:

$$\boldsymbol{v}_{i\perp}\times\boldsymbol{a}\cdot t + (1/2)\boldsymbol{a}_{\perp}\times\boldsymbol{a}\cdot t^2 = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}_{\perp}; \quad (5.13.\perp.1)$$

nella quale $\boldsymbol{a}_{\perp}$, che è il componente perpendicolare ad un vettore del vettore stesso, è, ovviamente, nullo e, quindi, trasforma la (5.13.⊥.1) nella:

$$\boldsymbol{v}_{i\perp}\times\boldsymbol{a}\cdot t = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}_{\perp}. \quad (5.13.\perp.2)$$

Purtroppo $\boldsymbol{a}$ non è ancora eliminabile a cuor leggero poiché i due prodotti scalari nei due membri della (5.13.⊥.2) darebbero un risultato nullo, verificando l'equazione ma non fornendo informazioni sul rapporto che lega $\boldsymbol{v}_{i\perp}$, t ed $\boldsymbol{s}_{\perp}$. Tuttavia, se dalla (5.13.⊥.2) si eliminano i prodotti scalari per $\boldsymbol{a}$, si ottiene la (5.1.2) riferita alla direzione perpendicolare all'accelerazione, ovvero alla direzione in cui l'accelerazione è nulla, il che è corretto dato che la (5.1.2) si riferisce, appunto, a quella situazione. La (5.13.⊥.2) si può, quindi, ridurre alla:

$$v_{i\perp}\cdot t = s_{\perp}. \quad (5.13.\perp.3)$$

che, ricongiunta con la (5.13.//.3), ci restituisce la (5.6).

eccezionalmente efficace.

5.3 - I moti rettilinei.

È comodo declinare la legge (5.6) al caso dei moti rettilinei. In questi moti, infatti, l'accelerazione dovrà giacere sulla medesima direzione della velocità iniziale e, quindi, dello spostamento. È quindi possibile sostituire alle grandezze vettoriali, presenti nella (5.6), i rispettivi moduli, ottenendo l'**equazione istantanea del moto rettilineo**:

$$s = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2; \quad (5.14)$$

nella quale, ovviamente, i moduli vanno considerati con gli opportuni segni, ovvero, fissato un verso positivo, i vettori orientati nel verso positivo avranno segno positivo, gli altri avranno segno negativo.

Vediamo ora alcuni moti rettilinei particolarmente utili.

5.3.1 - Moto rettilineo uniformemente accelerato.

La (5.14), come la (5.6), vale per brevi intervalli di tempo perché dipende da una grandezza definita su brevi intervalli di tempo, l'accelerazione istantanea. Se però considerassimo un moto rettilineo con un'accelerazione costante, allora le cose diventerebbero più semplici.

E' evidente infatti che, con un'accelerazione uniforme, le grandezze coinvolte non dipendono più dal tempo. Possiamo quindi riscrivere la (5.14) come:

$$s(t) = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2; \quad (5.15.1)$$

o

$$p(t) = p_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2; \quad (5.15.2)$$

nelle quali con $s(t)$ e con $p(t)$ abbiamo indicato che **le (5.15) sono le leggi orarie del moto rettilineo uniformemente accelerato**.

5.3.2 - Moto rettilineo uniforme.

La (5.6), nella versione (5.15), vale per i moti rettilinei uniformemente accelerati. Ma cosa succede se la velocità risulta uniforme?

In questo caso avremo che, per definizione, l'accelerazione risulterà nulla, poiché una velocità uniforme, ovvero con modulo costante, in un moto rettilineo, ovvero in un moto con direzione e verso costanti, è assolutamente costante. Questo implica che l'accelerazione risulta definitivamente nulla e, quindi, **il moto rettilineo uniforme** non **è** che **un moto uniformemente accelerato con accelerazione nulla** e, sostituendo $a = 0\ m/s^2$ nelle (5.15) troviamo le:

$$s(t) = v_i \cdot t; \text{ (5.16.1)}$$

o

$$p(t) = p_i + v_i \cdot t; \text{ (5.16.2)}$$

ovvero le **leggi orarie del moto rettilineo uniforme**.

5.4 - I moti non rettilinei.

Ci sono infinite tipologie di moto vario non rettilineo, ma fra queste vi sono alcuni casi particolari di grande interesse. La caratteristica che li accomuna è che la (5.9), in questi casi, può essere agevolmente trasformata in legge oraria. Per garantire questo, l'accelerazione deve essere costante o, quantomeno, uniforme.

Vediamo da vicino i due casi più significativi.

5.4.1 - Il moto del proiettile.

Il moto che andiamo ad analizzare è caratterizzato dalla costanza dell'accelerazione, ovvero dal fatto che questa non cambia né in modulo né in direzione e verso. L'esempio più semplice di accelerazione (localmente) costante è l'accelerazione di gravità ed il primo moto non rettilineo e sottoposto all'accelerazione di gravità storicamente studiato è proprio quello dei proiettili, ovvero degli oggetti passibili di essere “*proiettati*”, cioè lanciati.

Se riconsideriamo la (5.6) possiamo notare subito che essa si può riscrivere, con accelerazioni costanti, come:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{v}_i \cdot t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2; \text{ (5.17.1)}$$

oppure:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i \cdot t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2; \text{ (5.17.2)}$$

ovvero in forma di legge oraria, dato che, tutte le grandezze a secondo membro, essendo costante anche l'accelerazione, non dipendono più dal tempo. In effetti, però, la caratteristica vettoriale dei membri delle (5.17) ne rende piuttosto complesso l'uso.

Fortunatamente esiste la possibilità di sfruttare una semplice proprietà dei vettori: la scomposizione. In particolare, nel nostro caso, sarà opportuno scomporre la velocità nella direzione perpendicolare all'accelerazione e nella direzione a questa parallela. Otterremo una nuova legge del tipo:

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{v}_{i\perp}\cdot t+\boldsymbol{v}_{i//}\cdot t+ \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}t^2; \quad (5.18.1)$$

che può essere scritta come somma di due moti, perpendicolari e quindi matematicamente indipendenti l'uno dall'altro, che sono:

$$s_{\perp}(t) = v_{i\perp}\cdot t; \quad (5.18.2)$$

e

$$s_{//}(t) = v_{i//}\cdot t+ \frac{1}{2}\,a\cdot t^2; \quad (5.18.3)$$

ovvero una legge del moto rettilineo uniforme, che vale per la direzione perpendicolare a quella dell'accelerazione, più una legge del moto rettilineo uniformemente accelerato, che vale per la direzione parallela a quella dell'accelerazione.

5.4.2 - I moti circolari uniformi.

Se il nostro corpo subisce un'accelerazione centripeta uniforme, la direzione del suo moto viene continuamente alterata. Ma, in questo caso, anche l'accelerazione cambia continuamente direzione: questo significa che non è più costante e non sono più valide le (5.18).

Notiamo però che, anche in questo caso, possiamo scomporre la velocità in una componente parallela all'accelerazione ed una perpendicolare ad essa ottenendo:

$$s_{\perp}(t) = v_{i\perp}\cdot t; \quad (5.19.1)$$

e

$$s_{//}(t) = \frac{1}{2}\,a\cdot t^2; \quad (5.19.2)$$

ovvero con la possibilità di ridurre il moto nella somma di un moto rettilineo tangente alla traiettoria e perpendicolare all'accelerazione ed un moto uniformemente accelerato, verso il centro della traiettoria, con velocità iniziale nulla.

Se ora ci ricordiamo che l'accelerazione centripeta non fa altro che alterare la direzione del moto in modo da mantenerlo lungo una circonferenza, possiamo trascurare l'effetto della (5.19.2) (valida solo per brevi intervalli di tempo e, in questi, trascurabile) e descrivere il moto con la sola (5.19.1) che ci dirà quale sia lo spostamento compiuto lungo la circonferenza.

5.5 - Lavoro e potenza.

Come noto, una forza trasforma energia in funzione dello spostamento che produce sul corpo su cui agisce. La misura dell'energia trasformata in uno spostamento è quindi una misura assolutamente naturale, ma come possiamo misurare l'energia trasformata da una forza in un certo intervallo di tempo?

La grandezza che in Fisica si utilizza allo scopo è la **potenza**, ovvero **il lavoro compiuto da una forza in una unità di tempo**, in formule:

$$P = \frac{L}{t}. \quad (5.20)$$

Notiamo subito che la potenza, come la velocità, può essere rappresentata sia come grandezza media che come grandezza istantanea: nel secondo caso possiamo utilizzare la (4.1) e la (5.1), ottenendo:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{s}}{t} = \boldsymbol{F} \times \frac{\boldsymbol{s}}{t} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}; \quad (5.21)$$

espressione che utilizza la velocità istantanea.

Dato che la potenza istantanea non è, al contrario della velocità, un vettore, potenza media ed istantanea si indicheranno con lo stesso simbolo. Se necessario si aggiungerà un pedice.

La potenza si misura in watt (W) (dal nome di James Watt, 1736-1819, matematico ed ingegnere britannico che lavorò nell'ambito delle macchine a vapore) che, per la (5.20), sono joule al secondo (J/s).

5.6 - Alla ricerca del tempo perduto.

La legge (5.6) ci permette di determinare lo spostamento compiuto da un corpo fintanto che la sua accelerazione risulta costante. Se il moto avviene con accelerazione costante essa permette di determinare lo spostamento del corpo in un intervallo di tempo arbitrario.

Manteniamoci nel campo dei moti con accelerazione costante e ribaltiamo il problema: sapendo quanto il corpo si sposta determiniamo il tempo impiegato a compiere lo spostamento.

Abbiamo due possibili strade: la prima è scomporre moto e spostamento nelle due componenti parallela e perpendicolare all'accelerazione ed invertire le leggi relative. Come già visto nel paragrafo 5.3.1, le due leggi sono le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato ed uniforme, rispettivamente.

La seconda strada è ricavare il tempo impiegato dalla definizione di accelerazione, equazione (5.4), dopo avere ottenuto la velocità finale dalla (5.9):

$$\frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}; \quad (5.9)$$

Esplicitiamo la (5.9) rispetto a v_f^2:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2 \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}; \quad (5.22)$$

che, estratta la radice, ci da:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2 \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}}\ ; \quad (5.23)$$

La (5.23) ci fornisce il modulo della velocità finale ma non la sua descrizione geometrica. Essa risulta quindi utile in tutte le situazioni nelle quali la geometria del moto all'istante finale è nota. Essa è quindi liberamente applicabile nel caso di moti rettilinei uniformemente accelerati o, ad esempio, per determinare la velocità orizzontale nel moto del proiettile nota la quota massima raggiunta. La conoscenza della geometria finale è necessaria per applicare correttamente la (5.6), nella quale le velocità sono dei vettori.

È importante sottolineare che, essendo il prodotto $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}$ un prodotto scalare, quello che conta è lo spostamento nella direzione dell'accelerazione.

Nel caso di moti rettilinei uniformemente accelerati tutti i vettori presenti nella (5.23) e nella (5.3) sono paralleli e possono essere sostituiti con i rispettivi moduli, considerati con i segni opportuni. Possiamo quindi sostituire la velocità finale, ottenuta dalla prima equazione, nella seconda, trovando:

$$t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{\pm\sqrt{v_i^2 + 2as} - v_i}{a}\ ; \quad (5.24)$$

ovvero la soluzione della (5.17) esplicitata rispetto a t. Questa può anche scriversi come:

$$t = \pm\sqrt{(v_i/a)^2 + 2s/a^2} - v_i/a = \pm\sqrt{t_1^2 + t_2^2} - t_1 = t_3 - t_1; \quad (5.25)$$

nella quale t_1 è il tempo che il corpo impiegherebbe a raggiungere la velocità iniziale da fermo, t_2 è il tempo che il corpo impiegherebbe a percorrere lo spazio s partendo da fermo, e la radice restituisce il tempo totale t_3 che il corpo impiegherebbe per raggiungere la velocità finale da fermo.

Nel caso più generale di moti uniformemente accelerati la differenza a numeratore della (5.24) non può essere fatta poiché i due termini non sono entrambi vettori. Possiamo, però, rendere omogenei i termini dell'equazione utilizzando il solo componente della velocità parallelo all'accelerazione e la (5.24) diventa:

$$t = \frac{v_{f//} - v_{i//}}{a} = \frac{\pm\sqrt{v_{i//}^2 + 2\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{s}} - v_{i//}}{a}\ . \quad (5.26)$$

5.E - Esercizi.

5.E.1 - Un maratoneta percorre i 42,195 km del percorso di gara in 2 h e 30 min. Si dica:
a - quanto vale la velocità del maratoneta in chilometri all'ora;
b - quanto vale la velocità del maratoneta in metri al secondo.
Un suo avversario chiude la gara in 2 h e 15 min. Si dica:
a - quanto vale la velocità dell' avversario in chilometri all'ora;
b - quanto vale la velocità dell' avversario in metri al secondo.
Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.
[a: 16,9 km/h; b: 4,69 m/s; c: 18,8 km/h; d: 5,21 m/s]

5.E.2 - Un corridore percorre il primo tratto dei cento metri in 5 s portando la propria velocità a 10 m/s. Si dica:
a - quanto vale l'accelerazione subita dal corridore;
b - quanto spazio ha percorso intanto che accelerava;
c - quanto tempo impiegherà per percorrere i 100 m se la velocità raggiunta è mantenuta fino a fine gara.
Il suo vicino di corsia impiega 6 s per accelerare, ma raggiunge la velocità di 10,8 m/s
d - quanto vale l'accelerazione subita dal vicino di corsia;
e - quanto tempo impiegherà per percorrere i 100 m se la velocità raggiunta è mantenuta fino a fine gara.
Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.
[a: 2 m/s^2; b: 25 m; c: 12,5 s; d: 1,8 m/s^2; e: 12,3 s]

5.E.3 - Due ciclisti procedono lungo una strada alla velocità di 15 m/s e il secondo dista 1000 m dal traguardo. Si dica:
a - quanto tempo impiega il secondo ciclista a raggiungere il traguardo se accelera di 0,01 m/s^2;
b - quale dei due ciclisti vince se il primo ha un vantaggio di 100 m e procede a velocità costante;
c - dopo quanto tempo dall'istante considerato i due si troveranno appaiati;
d - quanta strada devono percorrere i due per trovarsi appaiati;
e - quanto vale la velocità raggiunta dal secondo ciclista al traguardo;
Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 65,25 s; b: il primo; c: 141,42 s; d: 2.121,32 m e 2.221,32 m; e: 15,65 m/s]

5.E.4 - Un cannone spara un colpo con una velocità iniziale di componenti orizzontale e verticale, verso l'alto, entrambe di 10 m/s. Considerando trascurabile l'effetto della forza d'attrito si dica:
a - quanto tempo impiega la palla di cannone a raggiungere la massima quota;
b - quanto vale la massima quota raggiunta dalla palla di cannone (si consideri una quota di partenza di 1 m);
c - quanto tempo impiega la palla di cannone per ricadere a terra;
d - a quale distanza cade la palla di cannone dal cannone stesso (gittata);
e - quanto vale la potenza media prodotta dalla forza totale agente sulla palla se questa percorre la canna del cannone, lunga 1,4142 m, in 0,2 s ed ha una massa di 30 kg.
Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.
[a: 1,02 s; b: 6,1 m; c: 1,12 s; d: 11,4 m; e: 15.000 W]

5.E.5 - Un cannone di una roccaforte spara un colpo contro una nave nemica con una velocità iniziale puramente orizzontale di 10 m/s. Considerando trascurabile l'effetto della forza d'attrito si dica:
a - quanto tempo impiega la palla di cannone a raggiungere la nave se questa si trova 30 m più in basso;
b - quanto vale la velocità con cui la palla colpisce la nave nemica;
c - a quale distanza si trovava dalla roccaforte la nave colpita (gittata);
d - quanto vale la potenza media prodotta dalla combustione della polvere da sparo se la palla percorre la canna del cannone, lunga 1 m, in 0,2 s ed ha una massa di 50 kg;
e - quanto vale la potenza prodotta dalla combustione della polvere da sparo nell'istante in cui la palla esce dalla canna del cannone.
Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.
[a: 2,47 s; b: 26,23 m/s; c: 24,7 m; d: 12.500 W; e: 25.000 W]

5.E.6 - Un giocatore di pallacanestro prova un tiro da tre dal limite. Considerando trascurabile l'effetto della forza d'attrito e sapendo che il tiro parte dalla quota di 2,40 m ed il canestro si trova sospeso alla quota di 3,05 m, si dica:

a - quanto vale la velocità iniziale verticale che permette alla palla di raggiungere la quota di 4 m;

b - quanto tempo impiega la palla a percorrere l'intera traiettoria;

c - quanto vale la velocità iniziale orizzontale che permette di andare a canestro (distanza 6,75 m);

d - quanto vale la potenza media prodotta sulla palla se la sua massa è 700 g e il lancio è compiuto in 0,1s;

e - quanto vale la potenza istantanea finale prodotta sulla palla.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 5,60 m/s; b: 1,01 s; c: 6,68 m/s; d: 265,9 W; e: 531,8 W]

5.E.7 - Un orologio utilizza dei pallini colorati che percorrono il quadrante lungo la stessa circonferenza: il pallino nero, più grosso, segna le ore, il pallino rosso, più piccolo, segna i minuti. Se un giro di quadrante è lungo 1,25 m si dica:

a - quanto vale la velocità del pallino delle ore in chilometri all'ora ed in metri al secondo;

b - quanto vale la velocità del pallino dei minuti in chilometri all'ora ed in metri al secondo;

c - quanto tempo trascorre fra due istanti successivi in cui i due pallini sono perfettamente sovrapposti;

d - quanto spazio percorrono i due pallini fra due istanti successivi in cui sono perfettamente sovrapposti.

Giustificare le risposte facendo riferimento al testo.

[a: 0,0000521 km/h, 0,0000145 m/s; b: 0,00125 km/h, 0,000347 m/s; c: 3760 s; d: 1,30 m, 0,0545 m]

6 - La dinamica.

Come sottolineato nel capitolo precedente, la cinematica descrive il moto senza preoccuparsi di quali siano le interazioni che ne causano le variazioni ne di quali siano le caratteristiche del corpo in moto: la descrizione fornita dalla cinematica è quindi quella del moto in sé.

Una descrizione più completa è quella che possiamo realizzare con gli strumenti della dinamica, ovvero rimettendo nella descrizione il corpo e giustificandone il moto attraverso le sue interazioni con gli altri corpi.

6.1 - Il baricentro di un corpo.

Parlando di traiettoria abbiamo detto che essa descrive la posizione, istante per istante, del punto detto **baricentro**, ovvero il punto nel quale possiamo considerare concentrata l'intera massa del corpo.

La domanda alla quale intendiamo rispondere ora è: come si trova il baricentro di un corpo?

Consideriamo un corpo simmetrico ed uniforme: il baricentro corrisponde, in questo caso, al centro geometrico del corpo.

Prendiamo ora in considerazione un generico corpo: questo può essere costituito di diverse parti composte da sostanze diverse, con diverse geometrie, anche asimmetriche, e diverse densità. L'individuazione del baricentro non è banale per un corpo con queste caratteristiche.

La matematica ci viene in aiuto assicurandoci che esiste la possibilità di descrivere qualunque forma geometrica come somma di un numero opportuno di cubetti, piccoli a sufficienza. Questo ci permette di dividere il corpo in un insieme di cubetti uniformi di ciascuno dei quali possiamo conoscere baricentro e massa. Note queste grandezze possiamo fare una media delle posizioni di ciascun cubetto, ognuna pesata per la propria massa, ottenendo le seguenti equazioni delle coordinate del baricentro:

$$x_b = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma x_i \cdot m_i}{\Sigma m_i}; \quad (6.1a)$$

$$y_b = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + \ldots + y_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma y_i \cdot m_i}{\Sigma m_i}; \quad (6.1b)$$

$$z_b = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + \ldots + z_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma z_i \cdot m_i}{\Sigma m_i}; \quad (6.1c)$$

ovvero:

$$\boldsymbol{p}_b = \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot m_1 + \boldsymbol{p}_2 \cdot m_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma \boldsymbol{p}_i \cdot m_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma \boldsymbol{p}_i \cdot m_i}{m}. \quad (6.2)$$

Possiamo quindi dire che **il baricentro è la media delle posizioni di ciascuna porzione elementare di materia che compone un corpo, pesate per la corrispondente massa**.

6.2 - La quantità di moto.

Il prodotto fra massa e velocità di un corpo è la grandezza fisica utilizzata per descrivere il suo stato del moto e si chiama **quantità di moto**; in formule:

$$\boldsymbol{q} = m \cdot \boldsymbol{v}. \quad (6.3)$$

che ci dice che la quantità di moto è un vettore con la direzione ed il verso della velocità istantanea del corpo. La sua unità di misura è il chilogrammo per metro al secondo.

Se consideriamo la relazione (3.11) e ne moltiplichiamo ambo i membri per la massa del corpo, otteniamo la relazione:

$$m \cdot \boldsymbol{v} = m \cdot \boldsymbol{s}/t; \quad (6.4a)$$

che, per la (5.3), si può scrivere:

$$m \cdot \boldsymbol{v} = m \cdot (\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i)/t; \quad (6.4b)$$

Ora, ricordando la (6.3) e ricordando che $\boldsymbol{p}$ è la posizione del baricentro del corpo, per la (6.2) possiamo riscrivere la (6.4b) come:

$$\boldsymbol{q} = m \cdot \boldsymbol{v} = m \cdot \frac{((\boldsymbol{p}_{1f} \cdot m_1 + \boldsymbol{p}_{2f} \cdot m_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_{nf} \cdot m_n)/m) - ((\boldsymbol{p}_{1i} \cdot m_1 + \boldsymbol{p}_{2i} \cdot m_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_{ni} \cdot m_n)/m)}{t} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{p}_{1f} \cdot m_1 + \boldsymbol{p}_{2f} \cdot m_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_{nf} \cdot m_n - (\boldsymbol{p}_{1i} \cdot m_1 + \boldsymbol{p}_{2i} \cdot m_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_{ni} \cdot m_n)}{t} =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{p}_{1f} - \boldsymbol{p}_{1i}) \cdot m_1 + (\boldsymbol{p}_{2f} - \boldsymbol{p}_{2i}) \cdot m_2 + \ldots + (\boldsymbol{p}_{nf} - \boldsymbol{p}_{ni}) \cdot m_n}{t} = \boldsymbol{v}_1 \cdot m_1 + \boldsymbol{v}_2 \cdot m_2 + \ldots + \boldsymbol{v}_n \cdot m_n = \Sigma_i\ \boldsymbol{q}_i; \quad (6.5)$$

che ci dice che la quantità di moto di un corpo non è altro che la somma della quantità di moto di ogni sua più piccola porzione.

6.3 - La forza e la quantità di moto.

Come già sottolineato nel primo capitolo, tutte le forze verificano l'equazione:

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}; \quad (4.2)$$

che ci dice che **la forza totale agente su di un corpo è pari al prodotto fra la sua massa e la sua accelerazione**.

Se riconsideriamo la (5.4) e moltiplichiamo ambo i membri per la massa del corpo troviamo un'altra equazione verificata da tutte le forze:

$$\boldsymbol{F} = m\cdot\boldsymbol{a} = m\cdot(\boldsymbol{v}_f-\boldsymbol{v}_i)/t = (\boldsymbol{q}_f-\boldsymbol{q}_i)/t; \ (6.6)$$

ovvero **la forza agente su di un corpo è pari anche alla variazione della sua quantità di moto in una unità di tempo**.

6.4 - I Principi della dinamica.

La dinamica risponde a tre leggi, dette *"principi della dinamica"*, identificate ed enunciate da Newton, che la riassumono e che l'hanno resa, per circa due secoli, il punto base dello sviluppo della disciplina, costituendo, con tutte le leggi derivate, il nocciolo della branca della Fisica noto col nome di Meccanica classica, la branca della quale ci stiamo occupando in questo testo.

6.4.1 - Il principio d'inerzia.

Il **primo principio della dinamica** fu espresso per la prima volta da Galileo Galilei (1564-1642), fisico pisano, e fu successivamente ripreso da Newton che lo indicò con il nome di *"principio di inerzia galileiano"*. Questo, noto anche come *"relatività galileiana"*, afferma che:

"un corpo conserva la propria quantità di moto finché le forze agenti su di esso sono all'equilibrio".

Il principio di inerzia è ricavabile dal secondo principio della dinamica nell'ipotesi di forze all'equilibrio.

6.4.2 - La legge fondamentale della dinamica.

Il **secondo principio della dinamica** o *"legge fondamentale della dinamica"* si riassume nelle equazioni già commentate nel paragrafo 6.3:

$$\boldsymbol{F} = m\cdot\boldsymbol{a}; \ (4.2)$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{q}_f-\boldsymbol{q}_i)/t. \ (6.6)$$

Questa legge riassume in sé anche gli altri due principi della dinamica, come dimostreremo nel paragrafo 6.4.4.

6.4.3 - Il principio di reciproca azione.

Il **terzo principio della dinamica** o *"principio di reciproca azione"* ci dice che:

*"quando un corpo a agisce con una forza **F** su un corpo b,*
*il corpo b agisce con la forza **-F** sul corpo a".*

Il principio di reciproca azione ci dice, dunque, che l'azione fra due corpi, descritta da una forza, è sempre reciproca.

Il principio di reciproca azione è noto anche come *"principio di azione e reazione"*, nome che suggerisce l'idea errata secondo cui, tirando un pugno ad un cuscino, questo, prima o poi, me lo restituirà. In realtà il povero cuscino mi restituisce la mia forza poco per volta, man mano che il pungo sprofonda in esso, dato che la forza con cui agisce sulla mano è di tipo elastico. Mi accorgo meglio della reciprocità dell'azione tirando un pugno ad un muro!

6.4.4 - La legge fondamentale e gli altri principi.

Come abbiamo già detto, il secondo principio raccoglie in se gli altri due. Dimostriamo questo fatto a partendo dal primo principio.

Se ci poniamo nella condizione di forze agenti all'equilibrio, prevista dal primo principio, troviamo in base alla (6.6), che non deve esserci variazione di quantità di moto nel tempo. Il primo principio è dunque esprimibile come il secondo in condizioni di equilibrio delle forze.

Per dimostrare il terzo, consideriamo un sistema costituito da un corpo composto di due parti mobili che interagiscono fra loro. Se il corpo è sottoposto all'azione di forze all'equilibrio allora il sistema deve conservare la propria quantità di moto. Questo implica che, se l'interazione fra le sue due parti produce una variazione della quantità di moto di una delle due, allora anche l'altra parte del corpo deve variare la propria quantità di moto, in modo da compensare la variazione della prima, poiché, come abbiamo visto nel paragrafo 6.2, la quantità di moto del corpo è la somma delle quantità di moto di ogni sua parte.

Dunque la variazione della quantità di moto della seconda parte sarà l'opposto della variazione della quantità di moto della prima e, siccome per il secondo principio queste coincidono con le due forze agenti, otteniamo che le forze che agiscono fra le due parti sono l'una l'opposto dell'altra.

6.4.5 - L'inerzia e l'arte della ‘leggerezza’.

Inerte è un vocabolo di origine latina che letteralmente significa: *“senza arte”*.

Nell'antichità si indicava come *“privo di arte”* chi era inattivo, chi non lavorava, in sostanza chi non agiva! Del resto i lavoratori di quei tempi erano artigiani, ovvero persone che conoscevano *“l'arte di un mestiere”*. Ancora oggi di una persona che non ha ne un mestiere ne un titolo di studi si dice che *“non ha ne arte ne parte”* ed un proverbio ancora in uso recita: *“impara l'arte e mettila da parte”*, ovvero: impara qualunque mestiere perché prima o poi ti servirà.

Il principio d'inerzia è dunque il principio della *“non azione”*, e può, dunque, essere letto in questo modo: *“un corpo soggetto all'azione di forze all'equilibrio non agisce”*. In che senso? Nel senso che non gli succede nulla di evidente: non cambia traiettoria e non cambia velocità. La quantità di moto si conserva.

Consideriamo ora un sistema composto da due corpi fra i quali agisca una forza: il terzo principio ci assicura che l'azione descritta da una forza è sempre reciproca. Se accanto a questo poniamo la forma (6.6) del secondo principio, ne dovremmo dedurre che tutti i corpi sono *‘artisti’* nella stessa misura.

Eppure la massa viene definita *‘inerziale’* o *‘inerte’*, come se un corpo fosse tanto meno attivo quanto più grande risulta la sua massa.

È lo stesso secondo principio, nella forma (4.2), a sottolineare come, il corpo sulla cui traiettoria risulta più evidente l'effetto dell'interazione (accelerazione maggiore), sia quello meno inerte (massa minore). Un po' come dire che il corpo con massa minore possiede più arte...

6.5 - Un esempio di dinamica di un sistema fisico.

Consideriamo il seguente esempio: un treno si muove lungo un tratto rettilineo e piano di binario sotto l'azione della propria forza motrice. Vogliamo sapere quanto vale quest'ultima se gli attriti sono trascurabili, la massa del treno (m_t) è 1000 tonnellate e l'accelerazione ($\boldsymbol{a}_t$) è di 3 m/s².

Applicando la legge fondamentale della dinamica nella forma (5.4), ricaviamo che

$$\boldsymbol{F}_m = m_t \cdot \boldsymbol{a}_t = 1000000\ kg \cdot 3\ m/s^2 = 3000000\ N.$$

Se ora osserviamo il fenomeno nell'ottica del principio di reciproca azione dobbiamo chiederci: quale è la forza opposta alla forza motrice del treno, e su quale corpo agisce?

Il treno sviluppa la forza motrice con il proprio motore, per scaricarla, attraverso le ruote, sui binari. Dunque l'interazione descritta dalla forza motrice è quella che avviene fra treno e binari, i quali sono ben fissati a terra. Il secondo corpo coinvolto ha, quindi, la massa dei binari e di tutto ciò che è ben fissato ad essi: più o meno i $6 \cdot 10^{24}\ kg$ della massa terrestre (m_T) la quale quindi subisce un'accelerazione pari a:

$$\boldsymbol{a}_T = -\boldsymbol{F}_m/m_T = -3000000\ N/6 \cdot 10^{24}\ kg = -5 \cdot 10^{-19}\ m/s^2;$$

ovvero circa $-0{,}000.000.000.000.000.000.5\ m/s^2$! Questo ci dice perché attribuiamo la variazione del moto al treno e non ai binari.

Poniamo ora che il treno sia composto da un locomotore con massa (m_l) pari a 100 tonnellate e vagoni (m_v) per un totale di 900 tonnellate. Ci chiediamo quale sia la forza con cui il locomotore agisce sui vagoni e viceversa.

Sia per il locomotore che per il gruppo dei vagoni vale sempre la legge fondamentale della dinamica e possiamo quindi scrivere che:

$$\boldsymbol{F}_l = m_l \cdot \boldsymbol{a}_t = 100000\ kg \cdot 3\ m/s^2 = 300000\ N;$$

e:

$$\boldsymbol{F}_v = m_v \cdot \boldsymbol{a}_t = 900000\ kg \cdot 3\ m/s^2 = 2700000\ N.$$

Quelle ricavate sono le forze totali agenti su locomotore e vagoni. I vagoni sono trascinati dal locomotore, quindi la forza ricavata è la forza con la quale il locomotore agisce sui vagoni, il locomotore, invece, subisce l'azione della forza motrice e della forza con la quale i vagoni agiscono su di esso. Quest'ultima, che indicheremo con $\boldsymbol{F}_{vl}$, dovrà verificare la condizione:

$$\boldsymbol{F}_l = \boldsymbol{F}_m + \boldsymbol{F}_{vl};$$

dalla quale ricaviamo che:

$$\boldsymbol{F}_{vl} = \boldsymbol{F}_l - \boldsymbol{F}_m = 300000\ N - 3000000\ N = -2700000\ N;$$

ovvero troviamo che *la forza con cui i vagoni agiscono sul locomotore è l'opposto della forza con la quale il locomotore agisce sui vagoni, in perfetto accordo con il principio di reciproca azione.*

6.6 - Quantità di moto ed energia.

Vi sono diverse relazioni che legano la quantità di moto all'energia. In questo capitolo ne vedremo alcune.

6.6.1 - Quantità di moto ed energia cinetica.

Il più ovvio legame fra quantità di moto ed energia è quello che passa attraverso la definizione dell'energia cinetica; dall'equazione approssimata dell'energia cinetica (3.8) ricaviamo, infatti, che:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2m} \cdot m^2 \cdot v^2 = \frac{q^2}{2m}; \quad (6.7)$$

che ci dice che **l'energia cinetica posseduta da un corpo è pari al rapporto fra il quadrato della sua quantità di moto ed il doppio della sua massa**.

6.6.2 - La quantità di moto ed il teorema dell'energia cinetica.

Secondo il teorema dell'energia cinetica il lavoro totale compiuto dalle forze agenti su di un corpo è pari alla variazione della sua energia cinetica. Questo può essere facilmente dimostrato nel caso di un moto rettilineo uniformemente accelerato.

Scriviamo, infatti, l'equazione della potenza, esprimendo il lavoro totale delle forze come lavoro della risultante:

$$L_{tot} = \boldsymbol{F}_{tot} \times \boldsymbol{s}; \quad (6.8)$$

e qui scriviamo la forza utilizzando la (6.6), il rapporto spostamento-tempo come velocità media ($\boldsymbol{v}_m$) ed operiamo come segue:

$$L_{tot} = (\boldsymbol{q}_f - \boldsymbol{q}_i) \times \boldsymbol{v}_m = (\boldsymbol{q}_f - \boldsymbol{q}_i) \times \boldsymbol{v}_m \cdot m/m = (\boldsymbol{q}_f - \boldsymbol{q}_i) \times \boldsymbol{q}_m/m; \quad (6.9)$$

nella quale con $\mathbf{q}_m$ abbiamo indicato la quantità di moto media.

A questo punto possiamo sfruttare il fatto che la velocità media, e conseguentemente anche la quantità di moto media, in un moto rettilineo uniformemente accelerato è pari alla media matematica dei valori iniziale e finale; quindi possiamo proseguire scrivendo che:

$$L_{tot} = (\boldsymbol{q}_f - \boldsymbol{q}_i)\boldsymbol{q}_m/m = (\boldsymbol{q}_f - \boldsymbol{q}_i) \times (\boldsymbol{q}_f + \boldsymbol{q}_i)/2m = (q_f^2 - q_i^2)/2m = (q_f^2/2m) - (q_i^2/2m) = E_{cf} - E_{ci}; \quad (6.10)$$

e ottenendo il teorema dell'energia cinetica.

6.6.3 - Quantità di moto e potenza istantanea.

Definita la quantità di moto è possibile scrivere la potenza istantanea prodotta dal lavoro di una forza agente su di un corpo in un terzo modo diverso da quelli visti nel paragrafo 6.5. Questa terza forma nasce dall'equazione (5.21), usando sia la (4.2) che la (6.6) come segue:

$$P = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = m \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = m \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{a}; \quad (6.11)$$

nella quale $\boldsymbol{q}$ è la quantità di moto istantanea del corpo ed $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione istantanea che la forza è in grado di imprimere al corpo in accordo con la legge fondamentale della dinamica.

6.E - Esercizi.

6.E.1 – Superman spinge un aereo, con i motori in avaria, per evitare che perda quota. Si dica:
a - quanto vale la forza totale esercitata sull'aereo se questo conserva la propria velocità;
b - quanto vale la forza prodotta dal supereroe se l'aereo deve vincere una forza d'attrito viscoso di 1 MN;
c - quanto vale la forza prodotta dall'aereo su Superman.
Improvvisamente si alza un forte vento contrario che rallenta l'aereo causando un'accelerazione di -20 m/s^2. Si dica:
d - quanto vale la nuova forza totale esercitata sull'aereo se questo ha massa pari a 100.000 kg;
e - quanto valgono la quantità di moto dell'aereo e la potenza istantanea prodotta dalla forza totale nell'istante in cui la velocità dell'aereo raggiunge i 200 m/s;
f - quanto vale l'energia cinetica posseduta dall'aereo.

[a: 0 N; b: 1 MN; c: -1 MN; d: -2 MN; e: 20.000.000 kg·m/s, -400 MW; f: 2 GJ]

6.E.2 - Flash sta correndo con quantità di moto di 1.000.000 kg·m/s, quando si volta un attimo e si schianta contro un palo. Si dica:
a - quanto vale forza totale esercitata su Flash se questo si ferma in 0,001 s;
b - quanto vale l'accelerazione subita dal supereroe se la sua massa è di 100 kg;
c - quanto valeva la sua velocità prima dell'urto;
d - quanto vale l'energia cinetica posseduta da Flash un istante prima di spiaccicarsi contro il palo;
e - quanto vale la potenza istantanea prodotta dalla forza totale, su Flash, al momento dell'impatto;
f - quanto viene deformato il palo prima che Flash riesca a fermarsi.

[a: -1 GN; b: -10 Mm/s^2; c: 10 km/s; d: 5 GJ; e: -10 TW; f: 5 m]

6.E.3 - Un incidente blocca il traffico lungo l'autostrada per Gotham City ed un TIR, guidato da Joker, non frena e spiaccica fra se ed un altro TIR la bat-mobile, piombandole addosso con quantità di moto di 1.200.000 kg·m/s. Si dica:
a - quanto vale forza totale esercitata sul TIR se questo si ferma in 0,6 s;
b - quanto vale la massa del TIR se l'accelerazione subita è di -20 m/s^2;
c - quanto vale l'energia cinetica posseduta dal TIR un istante prima di spiaccicare l'auto;
d - quanto vale la potenza istantanea prodotta dalla forza totale, sul TIR, al momento dell'impatto;
e - quanto era lunga la bat-mobile prima di rimanere spiaccicata sapendo che la lunghezza finale è nulla;
f - quanto vale la forza esercitata dalla bat-mobile sul TIR se la forza motrice del TIR era 10.000 N;
g - quanto vale la forza esercitata dal TIR sulla bat-mobile.
.
[a: -2 MN; b: 100.000 kg; c: 7,2 MJ; d: -12 MW; e: 3,6 m; f: -2,01 MN; g: 2,01 MN]

6.E.4 - Duffy Duck viene spiaccicato a terra da un masso che gli piomba in testa con quantità di moto di 4.900 kg·m/s. Si dica:
a - quanto vale forza totale esercitata sul masso se questo si ferma in 0,1 s;
b - quanto vale la massa del sasso se l'accelerazione subita è di -98 m/s^2;
c - quanto vale l'energia cinetica posseduta dal masso un istante prima di spiaccicare il papero;
d - quanto vale la potenza istantanea prodotta dalla forza totale, sul masso, al momento dell'impatto;
e - quanto era alto Duffy Duck prima di rimanere spiaccicato;
f - quanto vale la forza peso esercitata sul masso;
g - quanto vale la forza esercitata sul masso dal papero;
h - quanto vale la forza esercitata sul papero dal masso.

[a: -49 kN; b: 500 kg; c: 24.010 J; d: 480.200 W; e: 0,49 m; f: -98 kN; g: 98 kN]

7 - I sistemi di riferimento.

Un'attenta riflessione sui risultati della cinematica introduce una osservazione fondamentale: **la misura del moto di in corpo dipende dal punto di vista di chi lo osserva**. Questa banale osservazione è stata un punto fondamentale nello sviluppo della Fisica.

7.1 - I sistemi di riferimento.

Per il momento abbiamo sempre descritto i moti in termini ‘assoluti’, come se grandezze come spostamenti, velocità ed accelerazioni fossero grandezze la cui misura non dipende da chi li osserva.

In effetti, però, siamo perfettamente coscienti, ad esempio, che un ciclista che si muove lungo un viale nella direzione e nel verso del suo moto, se osservato da un passante fermo ad un semaforo, sembra muoversi nel verso opposto che se osservato da un automobilista che si sposti con uguali direzione e verso ma a velocità doppia di quella del ciclista. **La differenza nel moto osservato non sta nel moto in quanto tale ma nel moto di chi lo osserva**.

La necessità di comprendere come un osservatore *a* possa vedere un moto che osservato dall'osservatore *b*, di cui si conosce il moto rispetto ad *a*, segue un certo andamento, introduce la necessità di descrivere il moto in modo formalmente rigoroso. Per farlo è necessario che ciascun moto venga ‘inserito’ in un opportuno **sistema di riferimento**, ovvero che ciascun moto venga descritto rispetto ad un punto nello spazio, l'origine, utilizzato come riferimento fisso e ad un sistema di assi, centrati nell'origine e con direzioni e versi ben determinati, sui quali poter scomporre i vettori che descrivono, istante per istante, il moto.

La ‘fissità’ dell'origine e la buona determinazione di direzione e verso degli assi sono punti estremamente delicati, che assicurano la possibilità di trasformare il moto osservato da un osservatore, nello stesso moto osservato da un altro osservatore.

7.2 - Sistemi di riferimento ‘onesti’ e meno ‘onesti’.

Per valutare la qualità di un sistema di riferimento bisogna assicurarsi che questo sia onesto riguardo a ciò che in esso si osserva e, per fare questo, bisogna identificare le forze agenti in esso. Come abbiamo già visto, infatti, la legge fondamentale della dinamica, descritta dall'equazione (4.2), ci dice che c'è un rapporto diretto fra le forze agenti e l'accelerazione cui il corpo è sottoposto. Dato che la forza è la grandezza che descrive la reciproca azione fra due corpi, possiamo dire che **un sistema di riferimento è buono se la forza totale osservata sul corpo, ricavata** tramite la

(4.2) **dall'accelerazione osservata, è descrivibile come risultato della somma di tutte le forze** reali agenti su di esso, ovvero di tutte le forze **attribuibili ad interazioni con altri corpi**.

Le forze non attribuibili ad una interazione fra corpi si dicono **apparenti** e la loro presenza è un falso introdotto dal sistema di riferimento.

7.2.1 - Il principio d'inerzia ed i sistemi di riferimento inerziali.

Per quanto detto, in un buon sistema di riferimento non si osservano su di un corpo accelerazioni che non si giustifichino con l'interazione fra questo ed altri corpi. Questo significa che, per valutare se un sistema è un buon sistema di riferimento, è possibile considerare un corpo soggetto all'azione di forze all'equilibrio e verificare che, nel sistema considerato, questo conservi la propria quantità di moto. In altre parole, **in un buon sistema di riferimento, un corpo sottoposto a forze all'equilibrio deve verificare il principio d'inerzia,** ovvero deve conservare la propria quantità di moto. Per questa ragione i sistemi di riferimento 'buoni' vengono detti **inerziali**.

Potremmo anche esprimere il concetto in un modo più pittoresco ma piuttosto efficace: un sistema di riferimento inerziale è 'onesto' poiché non nasconde i corpi 'fannulloni' (c.f.r. §6.4.5).

Come vedremo nel capitolo 7.3, esiste una regola, detta trasformazione di Lorentz, che permette di cambiare il punto di vista passando da un sistema inerziale ad un altro.

Possiamo da subito notare che, se un sistema di riferimento *b* è osservato in moto rettilineo uniforme da un sistema inerziale *a*, allora, passando al punto di vista del sistema *b*, il sistema *a* sarà osservato in moto rettilineo uniforme. Questo significa che un corpo osservato in equilibrio statico nel sistema *a* è osservato in moto rettilineo uniforme nel sistema *b* e quindi, anche qui, verifica il principio d'inerzia. Dunque, una volta **identificato un sistema di riferimento inerziale *a*, sono sistemi di riferimento inerziali tutti i sistemi che si osservano in moto rettilineo uniforme stando in *a***.

7.2.2 - I sistemi di riferimento non inerziali.

Consideriamo il più semplice esempio di sistema di riferimento non inerziale: un sistema di riferimento che venga osservato in rotazione attorno ad un punto fisso in un sistema inerziale. Se consideriamo un corpo in equilibrio statico nel sistema inerziale, questo verrà osservato, nel sistema in rotazione, ruotare attorno al proprio centro di rotazione, e, come sappiamo dal paragrafo 5.2.2, se un corpo varia la direzione del proprio moto nel tempo allora è soggetto all'azione di una forza detta centripeta, che nel nostro caso, però, non è giustificata da alcuna interazione fra corpi ed è, quindi, una forza apparente.

Allo stesso modo pensiamo ad un sistema in moto rettilineo uniformemente accelerato rispetto ad un sistema inerziale: un corpo osservato in equilibrio statico nel sistema inerziale risulterà in moto uniformemente accelerato nel sistema uniformemente accelerato, risultando quindi soggetto all'azione di una forza totale non nulla agente sul corpo ma non giustificabile dalla presenza di una interazione con altri corpi. Ancora una volta ci troviamo di fronte ad una forza apparente e, quindi, ad un sistema non inerziale.

7.2.3 - Inerziali, ma non troppo...

Un sistema di riferimento inerziale per descrivere il moto di caduta libera di una pallina è quello che abbiamo sempre usato: un sistema solidale con la superficie terrestre. Eppure la terra è un corpo in rotazione, quindi i sistemi di riferimento ad essa solidali non sono sistemi di riferimento inerziali. Dove sta l'inghippo?

L'inghippo sta nel rapporto fra la ‘misura’ del moto osservato e quella del moto del sistema. Se, infatti, osservo il moto di una pallina in caduta libera in prossimità della superficie terrestre, gli effetti dovuti alla non inerzialità del sistema sono trascurabili, quindi non ci sono evidenti forze apparenti ed il sistema di riferimento terrestre risulta essere un buon sistema di riferimento. Non appena considero moti di ‘dimensione’ superiore, però, scopro che gli effetti della non inerzialità si fanno evidenti e, per cancellarli devo considerare un sistema solidale con la galassia. Ma anche la galassia ruota...

Insomma, **un sistema di riferimento è, in generale, inerziale solo localmente**. Di conseguenza non parleremo di sistemi inerziali in assoluto, ma di sistemi localmente inerziali o di **sistemi “inerziali rispetto al fenomeno osservato”**.

7.3 - Da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Come già anticipato nel paragrafo 7.2.1, per passare correttamente da un sistema di riferimento inerziale, ad un altro sistema di riferimento inerziale bisogna applicare le *trasformazioni di Lorentz*.

7.3.1 - Le trasformazioni di Lorentz.

Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928; premio Nobel per la Fisica nel 1902) ricavò le equazioni per la corretta trasformazione delle coordinate spazio-temporali elaborando algebricamente le equazioni che governano i fenomeni elettromagnetici.

Siano S_1 ed S_2 i due sistemi di riferimento inerziali. Se il moto di S_2 avviene nella direzione x di S_1, scegliendo le direzioni del sistema S_2 parallele a quelle di S_1 e le origini coincidenti all'istante $t_1 = t_2 = 0\ s$, allora la trasformazione segue le equazioni:

$x_2 = \gamma\cdot(x_1 - v\cdot t_1)$; (7.1.1)
$y_2 = y_1$; (7.1.2)
$z_2 = z_1$; (7.1.3)
$t_2 = \gamma\cdot(t_1 - x_1\cdot\beta/c)$; (7.1.4)

nelle quali v è la velocità con la quale S_2 si muove rispetto ad S_1, γ è il fattore di Lorentz definito come:

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}\ ; (3.7.2)$$

mentre β è la velocità normalizzata, definita come:

$$\beta = v / c; (3.7.3)$$

dove c è la *velocità della luce nel vuoto*.

Le trasformazioni di Lorentz furono successivamente ricavate per la seconda volta da Albert Einstein (1879 - 1955; premio Nobel per la Fisica nel 1905) a partire, questa volta, dalle equazioni del moto di un corpo e dall'evidenza sperimentale secondo cui **la luce si muove sempre alla velocità della luce, indipendentemente dallo stato del moto del sistema in cui viene osservata**.

7.3.2 - Lo spazio-tempo.

La grande novità introdotta da Albert Einstein fu l'idea che spazio e tempo non fossero entità indipendenti ed 'assolute' come si era ritenuto fino ad allora. Quello che più stupì e rivoluzionò il modo di pensare dell'epoca fu la variabilità dello scorrere del tempo. In effetti dalla (7.1c) si osserva che **lo scorrere del tempo è condizionato dallo stato del moto del sistema nel quale ci si trova** e, in particolare, che, per la (3.7), **più il sistema in cui ci si trova è veloce, più il tempo scorre lentamente. Tutto questo è vincolato da un limite verificabile sperimentalmente: la massima velocità raggiungibile nel vuoto è la velocità della luce.**

7.3.3 - Le trasformazioni di Galileo.

È evidente che la velocità normalizzata è trascurabile finché v è minore di un decimo di c e questo rende sostanzialmente uguale ad uno γ.

Se proviamo a sostituire nelle (7.1) 1 in luogo di β e 0 in luogo di γ, troviamo che, dati i sistemi inerziali S_1 ed S_2, con S_2 in moto lungo la direzione x di S_1 con velocità v, scegliendo le direzioni del sistema S_2 parallele a quelle di S_1 e le origini coincidenti all'istante $t_1 = t_2 = 0\ s$, allora la trasformazione segue le equazioni:

$x_2 = x_1 - v\cdot t_1$; (7.2.1)
$y_2 = y_1$; (7.2.2)
$z_2 = z_1$; (7.2.3)
$t_2 = t_1$; (7.2.4)

note come **trasformazioni di Galileo**.

Data l'estrema semplicità delle trasformazioni di Galileo è naturale utilizzarle ogni qual volta sia possibile, ovvero ogni qual volta β risulti trascurabile rendendo γ sostanzialmente uguale ad uno.

Per quanto ci riguarda poniamo come limite di velocità al di sotto del quale considerare lecito l'uso delle trasformazioni di Galileo il valore:

$$v < c/10 = 3 \cdot 10^7\ m/s. \quad (7.3)$$

7.4 - Galileo e l'"algebra dei moti".

Galileo fu il primo fisico ad accorgersi del fatto che i moti possono essere scomposti in moti più semplici di tipo rettilineo. Sua è l'idea di interpretare il moto del proiettile come composizione di un moto rettilineo uniforme ed uno uniformemente accelerato.

Consideriamo ora un corpo in moto rettilineo uniforme lungo x rispetto ad un sistema inerziale S_1, lo ritroviamo fermo se passiamo ad osservarlo in un sistema S_2 solidale con il corpo. Se poi passassimo ad osservarlo da un sistema inerziale che si muova in una direzione perpendicolare ad x, allora il moto osservato risulterebbe da un'opportuna composizione del moto del corpo e del moto del sistema.

Possiamo dunque introdurre una semplice algebra dei moti, basata sulla loro composizione.

7.4.1 - Composizioni: la somma dei moti.

Riconsideriamo il moto del proiettile, troviamo che questo può essere descritto come somma di due moti rettilinei elementari dato che, per la (5.8):

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}_i \cdot t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = (\mathbf{v}_{ix} + \mathbf{v}_{iy}) \cdot t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = (\mathbf{v}_{ix} \cdot t) + (\mathbf{v}_{iy} \cdot t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2) = \mathbf{s}_x + \mathbf{s}_y; \quad (7.4)$$

che presuppone che:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \quad (7.5)$$

Con analoghi passaggi si dimostra che è possibile scomporre qualunque moto in una somma di moti rettilinei lungo precise direzioni.

7.4.2 - Trasformazioni di Galileo: la differenza dei moti.

Ora consideriamo il caso del moto del proiettile immaginando una palla di cannone osservata dal punto di vista di un suicida che corra stando sempre sotto a questa per prendersela in testa! In questo caso avremo che il moto del proiettile, dal punto di vista del cannone (sistema inerziale S_1), può descriversi, secondo la (7.4), come somma di due moti rettilinei, mentre dal punto di vista del suicida (sistema inerziale S_2), questo risulterà un semplice moto verticale uniformemente accelerato, in accordo con quanto previsto dalle (7.2).

Se, infatti, consideriamo il solo moto lungo x e, ricordando la (7.2d), dividiamo ambo i membri della (7.2a) per t, troviamo:

$$x_2/t_2 = (x_1 - v\cdot t_1)/t_2$$

ovvero:

$$x_2/t_1 = (x_1 - v\cdot t_1)/t_1$$

da cui:

$$v_2 = v_1 - v; \; (7.6)$$

ovvero troviamo che *"la velocità con cui il moto del corpo viene osservato in un sistema inerziale S_2 è la differenza fra la velocità del corpo osservata in S_1 e la velocità di S_2 osservata in S_1"*.

Se il moto del corpo e quello di S_2 avvengono con direzioni diverse, la legge non cambia, dato che le componenti della velocità del corpo perpendicolari alla direzione del moto di S_2, si conservano invariate. Si può quindi generalizzare la (7.6) esprimendo le velocità tramite vettori:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}; \; (7.7)$$

7.5 - L'energia cinetica e l'algebra dei moti.

Abbiamo visto che composizione e trasformazioni di Galileo introducono una sorta di algebra di base delle velocità

Quello che cercheremo di capire ora è quali conseguenze questo abbia sui valori misurati dell'energia cinetica.

7.5.1 - Componenti perpendicolari e somma dell'energia cinetica.

Come abbiamo detto, un moto può essere descritto attraverso un'opportuna composizione di moti rettilinei. La domanda che ci poniamo è: quale è la composizione migliore da considerare?

Quello che si osserva è che vi è una somma di moti che verifica una proprietà molto importante: **l'energia cinetica totale del corpo risulta pari alla somma delle energie cinetiche nelle direzioni in cui il suo moto è scomposto**. Questa proprietà è verificata **solo se i moti**

componenti sono perpendicolari l'uno all'altro.

Consideriamo, infatti, una coppia di moti perpendicolari con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Dal teorema di Pitagora sappiamo che vale la relazione:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2; \quad (7.8)$$

avendo chiamato **v** la somma delle velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, ovvero la velocità effettiva del corpo.

Dalla (7.8) ricaviamo facilmente che:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\, m \cdot (v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2}\, m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = E_{c1} + E_{c2}; \quad (7.9)$$

avendo chiamato E_{c1} ed E_{c2} le energie cinetiche dei due moti perpendicolari.

7.5.2 - Trasformazioni di Galileo ed energia cinetica.

Ora che conosciamo le trasformazioni di Galileo possiamo cercare di capire quali possano essere le conseguenze di un cambio di sistema di riferimento sui valori di energia cinetica osservati e quello che si nota subito è che **dato che le trasformazioni di Galileo modificano le velocità osservate, anche le energie cinetiche osservate in sistemi di riferimento diversi, quantunque inerziali, saranno diverse**.

Inoltre, dato che le trasformazioni di Galileo modificano spostamenti e velocità ma non le accelerazioni, abbiamo che le forze totali osservate sono sempre le stesse (è quello che vogliamo!) ma la misura dei lavori che queste compiono dipende dal sistema di riferimento nel quale si compie la misura. Quindi, **per il teorema dell'energia cinetica, anche le variazioni dell'energia cinetica risultano dipendere dal sistema di riferimento in cui le si osservano**.

Tutto ciò avviene nel pieno rispetto del principio di conservazione dell'energia: il fatto di non poter 'trasportare' i valori dell'energia cinetica e le sua variazioni da un sistema inerziale ad un altro, infatti, non impedisce di poter garantire la conservazione dell'energia per misurazioni compiute in ciascun singolo sistema di riferimento, come fatto finora.

Il differente valore di energia cinetica osservato dipende dal fatto che l'energia cinetica misura il lavoro che le forze che agiscono sul corpo sono in grado di compiere per il fatto che il corpo è in moto, ovvero fino a che non si ferma, ma il concetto di corpo fermo è strettamente dipendente dal sistema di riferimento in cui il moto viene osservato. Dunque **le trasformazioni di Galileo** introducono una variazione dell'energia cinetica attribuita al corpo ma **fanno salvo il principio di conservazione dell'energia**.

8 - I sistemi di più corpi.

Fino a questo punto abbiamo parlato di ciò che accade in un sistema composto da un singolo corpo in diverse situazioni ma, con l'introduzione del principio di reciproca azione, appare logico iniziare a parlare di quanto accade in sistemi composti da due o più corpi, a causa delle loro reciproche interazioni.

Lo studio di sistemi di più corpi porta alla comprensione di fenomeni come urti ed esplosioni o come la propulsione dei corpi.

8.1 - Descrizione dinamica di un sistema di più corpi.

Abbiamo visto che, in dinamica, un singolo corpo può essere descritto attraverso la sua posizione, ovvero la posizione occupata dal suo baricentro, il suo stato del moto, ovvero la sua quantità di moto, e l'insieme delle interazioni che il corpo realizza con i corpi che lo circondano, ovvero la forza totale agente su di esso.

Se consideriamo un insieme di più corpi come un corpo ‘spezzettato’, allora risulta naturale considerare come sua posizione la posizione del suo **centro di massa**, ovvero la media delle posizioni dei baricentri dei vari corpi che compongono il sistema pesata per la massa di ciascuno di essi, come suo stato del moto la quantità di moto totale del sistema, ovvero la somma delle quantità di moto di ciascuno dei corpi che compongono il sistema, e come misura delle sue interazioni la forza totale agente sul sistema, ovvero la somma delle forze totali agenti su ciascuno dei corpi che compongono il sistema.

Ovviamente, una siffatta descrizione ci permette di ricavare lo spostamento del centro di massa e non quello dei singoli elementi del sistema: questa descrizione si può ottenere sovrapponendo al moto del centro di massa l'effetto delle interazioni interne al sistema, quelle che hanno luogo fra i corpi che lo compongono.

Riassumendo: possiamo descrivere un sistema composto da due o più corpi allo stesso modo in cui si descrive un singolo corpo, ovvero attraverso posizione del suo centro di massa, la sua quantità di moto e la forza totale che agisce su di esso, e sapere cosa succede all'interno del sistema attraverso l'analisi delle sole interazioni fra i suoi elementi.

8.2 - I sistemi di più corpi isolati.

I sistemi di più corpi possono essere ‘isolati’ dall'esterno, ovvero possono avere un'interazione totale nulla con corpi esterni al sistema stesso.

Il concetto di sistema isolato, con la casistica ad esso collegata, è più complesso di quanto appaia e merita di essere approfondito.

8.2.1 - Sistemi perfettamente isolati.

I sistemi perfettamente isolati sono quelli in cui nessun elemento del sistema interagisce con elementi ad esso esterni.

Questi, data la presenza in natura di interazioni presenti anche a distanze siderali (seppur sempre meno intense al crescere della distanza, come le forze elettromagnetiche e la forza di gravità), sono, in linea di principio, sistemi ideali.

Possono tuttavia essere considerati perfettamente isolati tutti quei sistemi nei quali, le interazioni con elementi ad essi esterni, risultano localmente trascurabili rispetto al fenomeno analizzato.

Le interazioni fra il sole ed i pianeti del sistema solare, ad esempio, generano le orbite planetarie. L'interazione del sistema solare con il resto della galassia alla quale appartiene, la via lattea, sebbene risulti tanto intensa da determinare un'orbita di rotazione dell'intero sistema attorno al centro della galassia, risulta assolutamente trascurabile rispetto alle orbite planetarie.

8.2.2 - Sistemi isolati di elementi in equilibrio con l'esterno.

I sistemi isolati di elementi in equilibrio con l'esterno sono quelli in cui ciascun elemento del sistema interagisce con elementi ad esso esterni realizzando con questi una interazione totale nulla.

In altre parole **ciascun elemento è all'equilibrio delle forze nell'interazione con elementi esterni al sistema** ovvero:

$$\mathbf{F}_{\text{tot ext}} = 0 \text{ N.} \quad (8.1)$$

Questo non esclude che gli elementi del sistema possano interagire fra di loro. Si pensi, ad esempio, al caso di una coppia di treni all'equilibrio delle forze: esse si muoveranno di moto rettilineo uniforme, ma se si muovono lungo lo stesso binario andando incontro l'uno all'altro, sicuramente interagiranno fra loro!

8.2.3 - Sistemi isolati di elementi non in equilibrio con l'esterno.

I sistemi isolati di elementi non in equilibrio con l'esterno sono quelli in cui ciascun elemento del sistema interagisce con elementi ad esso esterni realizzando con questi una interazione totale non nulla ma l'insieme delle interazioni con l'esterno risulta nulla.

In altre parole **alcuni fra gli elementi (o tutti) non sono all'equilibrio delle forze nell'interazione con elementi esterni al sistema ma la somma delle forze totali agenti su ciascun elemento risulta nulla** ovvero:

$$\mathbf{F}_{\text{tot ext sis}} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{tot ext}} = 0\ \text{N}. \quad (8.2)$$

Un esempio estremamente semplice di sistema isolato di elementi non isolati è quello composto da un tavolo e da un corpo appoggiato su di esso. In questo caso, infatti, entrambi gli elementi interagiscono con la terra, corpo esterno al sistema, che agisce producendo, su ciascuno di essi, una forza esterna non nulla. Il sistema risulta comunque isolato poiché l'interazione ha natura sia gravitazionale che vincolare e le due classi di interazioni si annullano a vicenda.

8.3 - La quantità di moto dei sistemi di corpi.

In questo capitolo considereremo sempre il sistema più semplice: quello composto da soli due corpi. Questo non costituisce un limite: tutte le osservazioni che faremo su questo sistema, infatti, possono essere estese a sistemi di più di due elementi, dato che le singole interazioni riguardano sempre singole coppie di elementi.

8.3.1 - Interazioni fra elementi e quantità di moto.

Consideriamo dunque un sistema di due elementi interagenti fra loro: vogliamo capire cosa succede al sistema ed a ciascuno dei suoi elementi.

Vediamo come viene alterato lo stato del moto degli elementi del sistema dall'interazione fra i due corpi; per semplicità poniamo che questi interagiscano con una forza **F** per un tempo *t*. In questo caso avremo che, per il secondo principio della dinamica, la variazione della quantità di moto dei due elementi si otterrà rispettivamente dalle:

$$\Delta\boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{F}_a \cdot t; \quad (8.3a)$$

$$\Delta\boldsymbol{q}_b = \boldsymbol{F}_b \cdot t; \quad (8.3b)$$

dalle quali, ricordando il terzo principio della dinamica ricaviamo che:

$$\Delta\boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{F}_a \cdot t = -\boldsymbol{F}_b \cdot t = -\Delta\boldsymbol{q}_b; \quad (8.4)$$

essendo $\boldsymbol{F}_a$ la forza con cui il primo elemento agisce sul secondo ed $\boldsymbol{F}_b$ la forza con cui il secondo elemento agisce sul primo.

Questo implica che la quantità di moto totale del sistema risulterà costante dato che:

$$\boldsymbol{q}_f = \boldsymbol{q}_i + \Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_i + \Delta\boldsymbol{q}_a + \Delta\boldsymbol{q}_b = \boldsymbol{q}_i + \Delta\boldsymbol{q}_a - \Delta\boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{q}_i. \quad (8.5)$$

ovvero **qualunque siano la natura e l'intensità, le interazioni fra gli elementi del sistema non ne alterano la quantità di moto**.

8.3.2 - Interazioni con corpi esterni e quantità di moto.

Consideriamo ora un sistema di due elementi che interagiscono con corpi esterni al sistema dando origine a forze non bilanciate.

Lo stato del moto degli elementi del sistema verrà alterato da queste interazioni in accordo con le relazioni:

$$\Delta \boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{F}_{ae} \cdot t; \ (8.6a)$$

$$\Delta \boldsymbol{q}_b = \boldsymbol{F}_{be} \cdot t; \ (8.6b)$$

nelle quali con $\boldsymbol{F}_{ae}$ ed $\boldsymbol{F}_{be}$ indichiamo la forza con cui i corpi esterni al sistema interagiscono, rispettivamente, con il primo e con il secondo elemento del sistema.

In questo caso, quindi, otterremo che la quantità di moto del sistema varierà secondo la relazione:

$$\Delta \boldsymbol{q} = \Delta \boldsymbol{q}_a + \Delta \boldsymbol{q}_b = (\boldsymbol{F}_{ae} + \boldsymbol{F}_{be}) \cdot t; \ (8.7)$$

ovvero, ricordando la conclusione a cui ci porta la (8.5): **la quantità di moto di un sistema si conserva se questo è un sistema isolato**; in altre parole vale il principio d'inerzia declinato sui sistemi di corpi.

8.4 - La conservazione della quantità di moto.

La conservazione della quantità di moto ci offre uno strumento per studiare l'evoluzione di sistemi di due o più corpi nei quali gli elementi interagiscono fra di loro.

Questo strumento ci permette di analizzare urti ed esplosioni e di comprendere il funzionamento dei motori ad elica, a reazione e della propulsione dei missili.

8.4.1 - Gli urti.

Si parla di urto quando due oggetti vengono a contatto e si deformano a vicenda.

Gli urti si distinguono in elastici, anelastici e parzialmente elastici o parzialmente anelastici, a seconda della natura del materiale di cui sono composti i corpi: se i corpi sono elastici l'urto che ne risulterà sarà di tipo elastico, se sono malleabili o la loro deformazione supera i limiti di elasticità allora saranno anelastici.

La differenza fra i due tipi di urto risiede nel modo in cui viene trasformata l'energia cinetica: qualunque sia la natura dell'urto, infatti, la deformazione indotta è uno spostamento degli elementi ultimi che costituiscono il materiale e le forze di coesione fra questi compieranno del lavoro.

8.4.2 - Gli urti elastici.

Negli urti elastici il lavoro delle forze di coesione trasforma l'energia cinetica in energia elastica; le forze continuano ad agire e, mentre il corpo riacquista la sua forma, il loro lavoro riconverte l'energia elastica in energia cinetica.

Dunque, **se l'urto elastico avviene in un sistema isolato, avremo la conservazione sia della quantità di moto che dell'energia cinetica**. Avremo dunque che oltre alla (8.5) varrà la:

$$E_{c\,tot} = E_{c1i}+E_{c2i} = E_{c1f}+E_{c2f}; \ (8.8.1)$$

nelle quali abbiamo indicato con il pedice *i* i valori iniziali, prima dell'urto, e con il pedice *f* i valori finali, dopo l'urto.

La (8.8.1) può essere unita con la (8.5), ricordando la (6.7), nella:

$$E_{c\,tot} = \frac{q_{1i}^2}{2\cdot m_1} + \frac{q_{2i}^2}{2\cdot m_2} = \frac{(\mathbf{q}_{1i}+\Delta\mathbf{q}_1)^2}{2\cdot m_1} + \frac{(\mathbf{q}_{2i}-\Delta\mathbf{q}_1)^2}{2\cdot m_2}; \ (8.8.2)$$

dalla quale si ricava che:

$$\Delta\mathbf{q}_1 = -\Delta\mathbf{q}_2 = 2\ m_r\ (\mathbf{v}_{2//}-\mathbf{v}_{1//}); \ (8.9.1)$$

nella quale si è considerato che la variazione delle quantità di moto avviene nella direzione dell'urto e si sono quindi considerati solo i componenti paralleli all'urto delle velocità iniziali mentre m_r è la massa ridotta del sistema, ovvero:

$$m_r = m_1\cdot m_2/(m_1+m_2); \ (8.9.2)$$

con ovvio significato dei simboli.

Il caso tipico di urto elastico è fra due palline da biliardo che rotolano sul piano del tavolo da biliardo o fra una pallina e la sponda del tavolo. In questo caso, infatti, l'attrito delle palline col panno che copre il piano può essere trascurato nel breve intervallo di tempo durante il quale le forze elastiche delle palline agiscono e quindi il sistema può considerarsi (istantaneamente) isolato. Inoltre le palline da biliardo generano urti che, in prima approssimazione, possono considerarsi completamente elastici.

8.4.3 - Gli urti anelastici.

Si parla di urto anelastico quando il lavoro delle forze di coesione interne ai corpi trasforma energia cinetica in calore; in questo caso le forze di coesione possono anche indicarsi come “attriti interni”.

La conseguenza è che, per la natura dell'energia termica, la parte dell'energia cinetica trasformata in energia termica non potrà essere riconvertita in energia cinetica: le forze d'attrito interno smettono di agire non appena la deformazione si è compiuta. Quindi, **dopo un urto perfettamente anelastico i due corpi coinvolti proseguono insieme**.

Questo implica che, in un sistema isolato, devono essere verificate le relazioni:

$$\boldsymbol{q}_{tot} = \boldsymbol{q}_{1i}+\boldsymbol{q}_{2i} = \boldsymbol{q}_{1f}+\boldsymbol{q}_{2f} = (m_1+m_2)\cdot\boldsymbol{v}_f; \quad (8.10)$$

e:

$$E_{c\,tot} = \frac{q_{1i}^2}{2\cdot m_1} + \frac{q_{2i}^2}{2\cdot m_2} = \frac{q_{tot}^2}{2\cdot(m_1+m_2)} + E_t. \quad (8.11)$$

Un esempio di urto totalmente anelastico è quello di alcuni incidenti stradali nei quali i due mezzi si incastrano l'uno nell'altro e procedono così agganciati per un ulteriore tratto. Ma è un buon esempio di urto totalmente anelastico anche quello di una sfera pesante che cada su di un vetro appoggiato su un tavolo rompendolo e fermandosi. La sola differenza fra i due fenomeni è che nel secondo l'energia termica prodotta dagli attriti interni del vetro viene utilizzata per una reazione endotermica: la separazione delle molecole che costituiscono la lastra. Questa è l'idea sulla quale si basa la realizzazione dei vetri anti proiettile.

8.4.4 - Gli urti parzialmente elastici e parzialmente anelastici.

Si parla di urto parzialmente elastico e parzialmente anelastico, quando le forze di coesione interne ai corpi sono in parte elastiche ed in parte attriti interni. La parte dell'energia cinetica del sistema trasformata in energia elastica verrà riconvertita in energia cinetica mentre la parte trasformata in energia termica rimarrà sotto tale forma. Per un sistema isolato nel quale avvenga questo tipo di urto, dunque, oltre alla (8.5) vale la relazione energetica:

$$E_{c\,tot} = E_{c1i}+E_{c2i} = E_{c1f}+E_{c2f}+E_t; \quad (8.12)$$

nella quale con E_t si è indicata l'energia termica prodotta dal lavoro degli attriti interni.

Quasi tutti gli urti reali sono in parte elastici ed in parte anelastici; data, però, la ridotta possibilità di operare in maniera semplice ed efficace con questo tipo di urti, spesso si approssimano urti molto elastici con urti completamente elastici ed urti poco elastici con urti totalmente anelastici.

8.5 - Spari ed esplosioni.

Spari ed esplosioni appartengono allo stesso gruppo di fenomeni: la rapidità con cui il sistema evolve ci permette di trascurare la variazione della quantità di moto degli elementi del sistema prodotta dalle interazioni con gli elementi ad esso esterni, permettendoci, quindi, di considerare il sistema (istantaneamente) isolato.

Avremo quindi la conservazione della quantità di moto totale e la trasformazione di energie di varia forma (tipicamente chimiche), in energia cinetica.

È proprio la conservazione della quantità di moto a generare comportamenti tipici per questi fenomeni, come il rinculo delle armi da fuoco. L'idea è semplice: se al momento dello sparo il proiettile varia la propria quantità di moto di $\Delta \mathbf{q}_f$, affinché la quantità di moto totale si conservi l'arma deve variare la propria quantità di moto di $-\Delta \mathbf{q}_f$, in accordo con l'equazione:

$$\mathbf{q}_{tot} = m_{tot} \cdot \mathbf{v}_i = \Sigma_i \mathbf{q}_{if}. \quad (8.13)$$

Le differenti velocità finali dipendono dalle differenti masse dei due corpi.

8.6 - Propulsione nei fluidi e nel vuoto.

La propulsione dei mezzi che si muovono nei fluidi si basa sulla possibilità di applicare la conservazione della quantità di moto spostando parte del fluido in cui ci si muove nel verso opposto a quello del moto. Un esempio estremamente chiaro è il movimento dei pesci e dei nuotatori, ma anche quello dei remi nell'acqua. Lo stesso principio viene utilizzato nei mezzi con propulsione ad elica.

Per il secondo principio della dinamica possiamo affermare che tutti questi tipi di propulsione si basano sulla relazione:

$$\mathbf{F}_m = -\Delta \mathbf{q}_f / t; \quad (8.14)$$

nella quale con $\mathbf{F}_m$ abbiamo indicato la forza che spinge il mezzo (forza motrice) e con $\Delta \mathbf{q}_f$ abbiamo indicato la variazione della quantità di moto della massa di fluido spostato nell'intervallo di tempo t.

La propulsione dei razzi somiglia più delle altre ad uno sparo: non essendoci, nel vuoto, fluidi da spostare, il razzo espelle una piccola parte della sua massa a grande velocità ottenendo la spinta prevista dalla (8.14). Il fenomeno è del tutto simile al rinculo di un'arma da fuoco.

Il motore a reazione è la soluzione intermedia fra le due: il gas combusto aziona una turbina che mette in moto un'elica la quale sposta una grossa quantità di fluido che si aggiunge al gas combusto. La relazione che ne governa il funzionamento è sempre la (8.14) ma il fluido spostato è in parte 'sparato' dalla combustione, come in un missile, ed in parte spostato dall'elica.

8.7 - Propulsione per attrito.

La propulsione di alcuni corpi avviene per attrito con un corpo in moto. Lo stesso principio viene sfruttato per ottenere che alcune parti di motori vengano messe in moto sfruttando il moto di altre parti.

L'esempio classico di questa propulsione è la nave a vela: il sistema da considerare, come nel caso della propulsione ad elica, è composto dalla nave e dal fluido ma in questo caso la porzione di fluido che ci interessa non aumenta la propria quantità di moto per la spinta ricevuta ma la riduce trasmettendola alla nave. La relazione che governa questo tipo di propulsione è sempre la (8.13), solo che, in questo caso, il corpo si muove nella direzione del fluido.

L'applicazione tipica di questo fenomeno nei motori è dato dalle trasmissioni a frizione: riprenderemo questo esempio parlando dei moti di rotazione.

9 - I corpi rigidi.

Un corpo reale può muoversi spostando il proprio baricentro, ma può muoversi anche ruotando attorno ad esso. Il suo moto totale può, dunque, essere descritto come composizione del moto di traslazione, che descrive gli spostamenti del suo baricentro, e dei moti di rotazione, attorno al suo baricentro.

Mentre la cinematica della rotazione viene descritta utilizzando grandezze ‘angolari’, la dinamica che da origine ai moti di rotazione, viene descritta utilizzando grandezze ‘polari’.

L'asse di rotazione, che è centro e polo delle grandezze, passa, quasi sempre, per il baricentro del corpo.

9.1 - Cinematica della rotazione di un corpo.

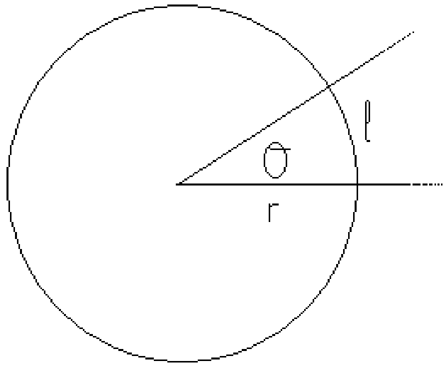
Abbiamo imparato a descrivere il moto di un corpo utilizzando la sua posizione, la sua velocità e la sua accelerazione, ovvero le grandezze con le quali si descrive il modo in cui si sposta il baricentro del corpo. Queste grandezze, però, non sono adatte a descrivere i moti di rotazione, dato che questi possono avvenire senza spostamento del baricentro.

Per questa ragione vengono introdotte le **grandezze angolari**.

9.1.1 - L'angolo.

L'angolo è la grandezza angolare per eccellenza, equivale alla posizione nei moti di traslazione, ed è una grandezza adimensionale, ovvero una grandezza per la quale non è definita un'unità di misura. Infatti, considerata una circonferenza di raggio r centrata nell'angolo, l'angolo è definito come il rapporto fra la lunghezza l dell'arco di circonferenza, intercettato dalle semirette che lo delimitano, e la lunghezza del raggio r. In formule:

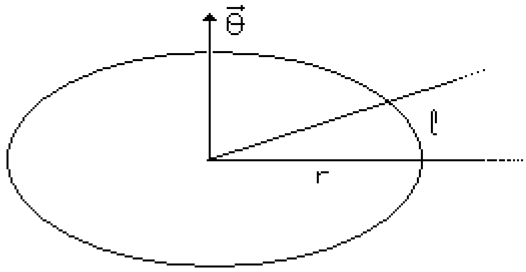
$$\theta = l/r; \quad (9.1)$$



nella quale con θ abbiamo indicato l'angolo.

Pur non essendo una grandezza dimensionale si dice che l'angolo si misura in ‘radianti’ (simbolo: *rad*). L'intera circonferenza ha perimetro pari a $2\pi r$, corrispondenti ad un angolo giro, ovvero un angolo di 2π radianti.

9.1.2 - L'angolo è un vettore.



Anche l'angolo, come la posizione, è un vettore.

Il vettore angolo ha direzione perpendicolare al piano sul quale giace e verso uscente da questo (entrante se negativo).

9.1.3 - La velocità angolare.

Come la velocità di un corpo è lo spazio che questo percorre in un'unità di tempo, allo stesso modo la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un corpo è l'angolo di rotazione che questo copre in una unità di tempo:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta}/t. \quad (9.2)$$

L'unità di misura della velocità angolare è il *rad/s*.

Dalla definizione dell'angolo (9.1), troviamo che, un punto distante r dal centro di rotazione si muove con velocità pari a:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{l \cdot r}{r \cdot t} = \frac{\theta \cdot r}{t} = \omega \cdot r; \quad (9.3)$$

o, usando la relazione vettoriale corrispondente, che:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}; \quad (9.4)$$

che ci dice che la velocità $\boldsymbol{v}$ di un punto di un corpo in rotazione è pari al **prodotto vettoriale** della posizione $\boldsymbol{r}$ del punto rispetto al centro di rotazione, per la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ con cui il corpo ruota.

9.1.4 - La velocità angolare è un vettore.

Anche la velocità angolare, come la velocità lineare, è un vettore.

Il vettore velocità angolare, secondo quanto previsto dalla (9.2), prende le sue caratteristiche geometriche dall'angolo coperto nella rotazione. Esso giace, quindi, sull'asse di rotazione ed ha direzione perpendicolare al piano di rotazione. Il verso è uscente dal questo quando la rotazione è antioraria (segno positivo), entrante se la rotazione è oraria (segno negativo).

9.1.5 - Il prodotto vettoriale.

Il **prodotto vettoriale** è un'**operazione che prende come operandi due vettori e restituisce come risultato un vettore**. Il vettore prodotto è un vettore che ha direzione perpendicolare al piano su cui giacciono i due vettori, e verso determinabile attraverso la "regola della mano destra":

posto il pollice della mano destra nella direzione del primo vettore e le altre dita, distese, nella direzione del secondo, il vettore prodotto ha verso 'uscente' dal palmo della mano.

Il modulo del vettore prodotto è pari al prodotto dei moduli se i due vettori che vengono moltiplicati sono perpendicolari e nullo se sono paralleli, il contrario del prodotto scalare. Questo ci permette di dire che il modulo del prodotto vettoriale ***p*** dei vettori ***a*** e ***b*** verifica la relazione:

$$p = a \cdot b_{\perp} = a_{\perp} \cdot b. \quad (9.5)$$

Il prodotto vettoriale è un tipico esempio di operazione che non gode della proprietà commutativa: invertendo l'ordine dei fattori, infatti, il vettore risultato cambia verso.

9.1.6 - L'accelerazione angolare.

Come l'accelerazione di un corpo è la variazione della velocità con la quale questo si sposta in un'unità di tempo, allo stesso modo l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$ di un corpo è la variazione della velocità angolare con la quale il corpo ruota in una unità di tempo:

$$\boldsymbol{\alpha} = \Delta\boldsymbol{\omega}/t. \quad (9.6)$$

L'accelerazione angolare si misura in *rad/s²*.

Anche l'accelerazione angolare e l'accelerazione lineare sono legati al raggio dalla relazione vettoriale:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{r}; \quad (9.7)$$

che ci dice che l'accelerazione tangenziale ***a*** di un punto di un corpo in rotazione è pari al prodotto vettoriale della posizione ***r*** del punto rispetto all'asse di rotazione, per l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$ con cui il corpo ruota.

9.1.7 - L'accelerazione angolare è un vettore.

Anche l'accelerazione angolare, come l'accelerazione lineare, è un vettore.

Il vettore accelerazione angolare, secondo quanto previsto dalla (9.6), prende le sue caratteristiche geometriche dalla variazione della velocità angolare. Esso giace, quindi, sull'asse di rotazione ed ha direzione perpendicolare al piano di rotazione, con verso uscente dal piano quando la velocità angolare cresce (segno positivo) ed entrante quando si riduce (segno negativo).

9.2 - Dinamica delle rotazioni.

Abbiamo visto che la dinamica del moto di traslazione di un corpo si basa su tre grandezze: la massa, la quantità di moto, e la forza.

Ciascuna di queste grandezze ha un corrispondente nel mondo delle rotazioni: si tratta di grandezze ‘polari’, ovvero che fanno riferimento ad un punto detto ‘polo’. Il nostro polo è l'asse di rotazione, in genere passante per il baricentro.

9.2.1 - Il momento d'inerzia.

La tendenza di un corpo a mantenere il proprio stato del moto, resistendo all'azione di una forza, viene detta inerzia e si misura con una massa. Nei moti di rotazione, la tendenza di un corpo a resistere alle interazioni con altri corpi, viene rappresentato dal momento d'inerzia, che si definisce con la relazione:

$$I = \Sigma m_i \cdot r_i^2; \quad (9.8)$$

la quale ci dice che **il momento d'inerzia di un corpo, rispetto ad un certo asse di rotazione, è la somma dei prodotti della massa m_i di ogni porzione del corpo, per il quadrato della distanza r_i della porzione considerata dall'asse di rotazione** e si misura in $kg \cdot m^2$.

9.2.2 - Il momento della quantità di moto (o momento angolare).

Come lo stato del moto di traslazione di un corpo è descrivibile col vettore quantità di moto, così lo stato del moto di rotazione di un corpo è descrivibile con il vettore momento della quantità di moto, o momento angolare, descritto dalla relazione:

$$\boldsymbol{L} = \Sigma \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q}. \quad (9.9)$$

che ci dice che **il momento della quantità di moto L di un corpo è pari alla somma dei prodotti vettoriali della distanza r di ogni porzione del corpo dall'asse di rotazione, per la quantità di moto q della porzione considerata**, e si misura in $kg \cdot m^2/s$.

Dalla (9.9), ricordando la (9.4) e la definizione di quantità di moto (6.5) si trova che:

$$\boldsymbol{L} = \Sigma \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{q}_i = \Sigma \boldsymbol{r}_i \wedge (m \cdot \boldsymbol{v}_i) = \Sigma m_i \cdot (\boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{v}_i) = \Sigma m_i \cdot (\boldsymbol{r}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_i)) = \Sigma m_i \cdot (r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega}) = \Sigma m_i \cdot r_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega} = I \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad (9.10)$$

ovvero che **il momento della quantità di moto *L* di un corpo, rispetto ad un certo asse di rotazione, è pari al prodotto del momento d'inerzia *I* del corpo, rispetto all'asse scelto, per la velocità angolare *ω* con cui il corpo ruota**.

9.2.3 - Il momento della forza.

L'interazione fra corpi che genera una traslazione viene efficacemente rappresentata da una forza che agisce lungo una direzione passante per il baricentro del corpo. Se la direzione della forza non passa dal baricentro del corpo, dobbiamo descrivere l'interazione fra corpi con il momento della forza, che risponde all'equazione:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}; \quad (9.11)$$

che ci dice che **il momento della forza *M* agente su un corpo, rispetto ad un certo asse di rotazione, è il prodotto vettoriale della distanza *r* dall'asse di rotazione del corpo del punto di applicazione della forza, per la forza *F* agente** e si misura in $N \cdot m$.

Questa, ricordando il secondo principio della dinamica, diventa:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \wedge (m \cdot \boldsymbol{a}) = m \cdot (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a}) = m \cdot (\boldsymbol{r} \wedge (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{r})) = m \cdot r^2 \boldsymbol{\alpha} = I \cdot \boldsymbol{\alpha}; \quad (9.12)$$

che ci dice che **il momento totale delle forze agenti su di un corpo, rispetto ad un certo asse di rotazione, è il prodotto vettoriale del momento d'inerzia *I* del corpo, rispetto all'asse considerato, per l'accelerazione angolare *α* prodotta dalle forze sul corpo**.

La (9.12) è la *legge fondamentale della dinamica* per i *moti di rotazione*.

9.2.4 - Il momento di una forza non è un lavoro!

Come risulta dalla (9.11), il momento di una forza si misura in $N \cdot m$, in quanto prodotto di una forza per uno spostamento. Anche **il lavoro di una forza** è il prodotto di una forza per uno spostamento ma **è un prodotto scalare**. Di conseguenza la sua unità di misura non è $N \cdot m$ ma è il Joule. **Il momento di una forza è un prodotto vettoriale**, quindi **non ha nulla a che fare con un lavoro**, né con la sua unità di misura.

9.2.5 - Rotazione di sistemi momento-isolati.

Come nei sistemi isolati, ovvero quelli sui quali non agiscono forze non bilanciate dovute all'interazione con corpi esterni al sistema, si conserva la quantità di moto, allo stesso modo nei sistemi “momento-isolati”, ovvero quelli sui quali non agiscono momenti delle forze non bilanciati dovuti all'interazione con corpi esterni al sistema, si conserva il momento della quantità di moto.

Un esempio tipico di cosa questo implichi sono i pattinatori quando ruotano su loro stessi o i tuffatori mentre ruotano nell'aria. Osservando il loro moto si nota che la rotazione è tanto più rapida quanto più il corpo dell'atleta è raccolto attorno all'asse di rotazione e tanto più lenta quanto più braccia e gambe sono distese lontano dall'asse di rotazione.

Secondo quanto previsto dalla (9.8), infatti, quando il corpo è più raccolto il momento d'inerzia è più piccolo e gli atleti, essendo sistemi momento-isolati, conservano il momento della quantità di moto in accordo con la legge:

$$\boldsymbol{L} = I_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i = I_f \cdot \boldsymbol{\omega}_f; \ (9.13)$$

nella quale con il pedice i abbiamo indicato i valori iniziali, mentre con il pedice f abbiamo indicato i valori finali.

Un altro fenomeno legato alla conservazione del momento della quantità di moto è la trasmissione della rotazione per ‘frizione’, ovvero per attrito di contatto fra due corpi in diversi stati di rotazione, come nell'esempio riportato nella figura accanto.

L'attrito di contatto segue la relazione

$$F_a = F_{\perp} \cdot \alpha; \ (9.14)$$

che ci dice che il modulo della forza d'attrito radente F_a che agisce fra due corpi premuti l'uno contro l'altro da una forza premente $F_{\perp}$, è il prodotto fra il modulo della forza premente e il coefficiente d'attrito radente α.

Nel nostro caso la forza d'attrito da origine ad un momento della forza agente su ciascuno dei due dischi: mentre quello più veloce rallenta, quello più lento accelera, con il risultato netto di una rotazione finale uguale per entrambi.

9.3 - Statica dei corpi rigidi e leve.

Il concetto di momento della forza ha interessanti ripercussioni sui possibili equilibri ottenibili impiegando corpi rigidi: l'equilibrio delle forze garantisce la possibilità che un quadro rimanga appeso alla parete ma non ci garantisce che rimanga dritto! Inoltre i corpi rigidi ci permettono di realizzare uno strumento base della meccanica applicata, la leva, la cui efficacia, legata proprio al concetto di momento della forza, fu espressa magistralmente dall'affermazione di Archimede: “*datemi un punto d'appoggio e vi solleverò il mondo*”.

9.3.1 - La statica dei corpi rigidi.

Consideriamo una trave appoggiata, ad un estremo, ad una colonna: essa è sottoposta all'azione della forza peso e della reazione vincolare della colonna. Ma quest'ultima agisce lungo una direzione che non passa per il baricentro della trave, quindi il sistema è soggetto ad un momento delle forze che le imprime un moto di rotazione: la trave ruota e cade.

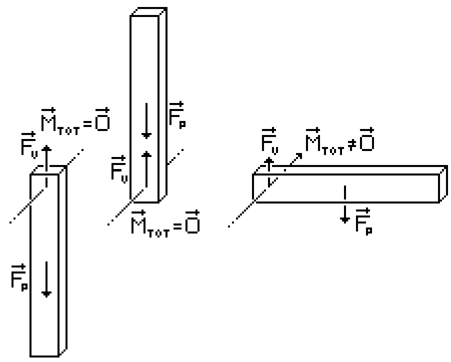
Se però appoggiamo l'altra estremità su di un'altra colonna, allora otteniamo un ulteriore momento delle forze tale per cui:

$$\mathbf{M}_{tot} = \mathbf{M}_p+\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_p\wedge\mathbf{F}_p+\mathbf{r}_1\wedge\mathbf{F}_1+\mathbf{r}_2\wedge\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2 = 0N\cdot m; \quad (9.15)$$

dato che $\mathbf{r}_p$ risulta nullo. Quindi possiamo dire che, fissato come polo il baricentro della trave, la seconda colonna agisce con una forza tale che:

$$\mathbf{r}_2\wedge \mathbf{F}_2= -\mathbf{M}_1. \quad (9.16)$$

9.3.2 - Equilibrio e stabilità.



Consideriamo un oggetto imperniato su di un asse, ad esempio un'asta. Su di essa agiscono due forze: la forza peso dell'asta e la forza vincolare del perno.

Il momento totale delle due forze agenti, se prendiamo il baricentro come polo, vale:

$$\mathbf{M}_{tot} = \mathbf{M}_p+\mathbf{M}_v = \mathbf{r}_p\wedge\mathbf{F}_p+\mathbf{r}_v\wedge\mathbf{F}_v = \mathbf{M}_v; \quad (9.17)$$

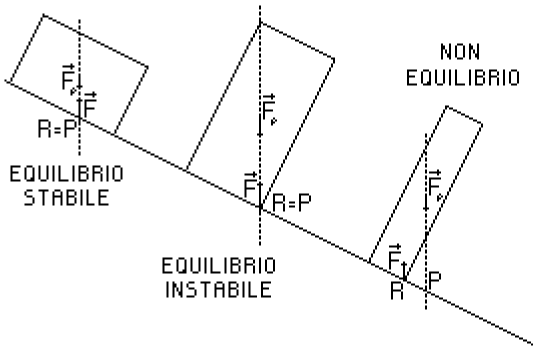
dato che, come prima, $\mathbf{r}_p$ risulta nullo.

Quindi possiamo dire che il momento totale delle forze è nullo quando è nullo il prodotto vettoriale $\mathbf{r}_v\wedge\mathbf{F}_v$. Da quanto detto nel paragrafo (9.1.5) sappiamo che questo è nullo quando i due vettori sono paralleli, ovvero quando il baricentro è sulla verticale del perno. Queste posizioni vengono quindi dette di **equilibrio** mentre qualunque altra posizione è di **non equilibrio**.

Ciò che distingue i due casi di equilibrio è la stabilità dello stato: quando il baricentro si trova sotto al perno, infatti, ad ogni piccola perturbazione del sistema questo risponde tornando indietro spontaneamente, mentre quando il baricentro si trova al di sopra del perno, ogni piccola perturbazione del sistema causa il passaggio di questo all'altra posizione di equilibrio. Per questa ragione la posizione del sistema nel primo caso viene detta di **equilibrio stabile**, mentre nel secondo viene detta di **equilibrio instabile**.

Apparentemente più complesso è il caso di un corpo rigido appoggiato su di una superficie inclinata poiché sia la forza vincolare che la forza d'attrito radente, generate dal piano, si distribuiscono sulla superficie di base in maniera non omogenea.

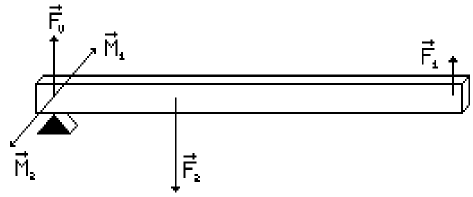
Fortunatamente, però, l'effetto complessivo equivale a quello di una sola forza **F** agente in un punto *R* della base.



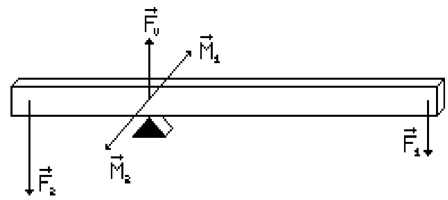
Detto, quindi, *P* il punto in cui la perpendicolare al baricentro interseca la superficie del corpo, se *P* cade nella base, *R* corrisponde a *P* ed il corpo sarà in equilibrio stabile, se cade sul bordo della base, *R* coincide ancora con *P* ma il corpo sarà in equilibrio instabile; se cade al di fuori della base *R* sarà sul punto del bordo della base più vicino a *P* ed il corpo rotolerà giù per il piano.

9.3.3 - Le leve.

Se riconsideriamo le (9.15) e (9.16), osserviamo che, nell'esempio della trave, la forza esercitata dalla seconda colonna risulta tanto maggiore quanto più vicino si trova il punto d'appoggio al baricentro della trave. È possibile sfruttare questa differenza fra forze agenti dovuta ai diversi momenti delle forze realizzando una leva.



Una leva è un sistema costituito da un corpo rigido, imperniato in un punto detto fulcro; sul corpo agiscono tre forze, di cui una è la reazione vincolare presente nel fulcro.



Scegliendo il fulcro come polo del sistema la reazione vincolare genera un momento nullo ed il sistema può essere descritto con il momento totale generato dalle due forze agenti:

$$\boldsymbol{M}_{tot} = \boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2. \quad (9.18)$$

Da questa relazione, imponendo la condizione di equilibrio, ovvero l'annullamento del momento totale, è possibile ricavare:

$$\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2; \quad (9.19)$$

ovvero:

$$\boldsymbol{r}_1\wedge\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{r}_2\wedge\boldsymbol{F}_2. \quad (9.20)$$

Se forze e raggi sono fra loro paralleli è possibile verificare che il rapporto dei loro moduli segue la relazione:

$$F_1 = F_2/(r_1/r_2). \quad (9.21)$$

Il rapporto dei raggi r_1/r_2 viene detto **vantaggio di leva** poiché se $\boldsymbol{F}_1$ è la forza con cui noi agiamo sulla leva ed $\boldsymbol{F}_2$ è la forza che dobbiamo bilanciare, quanto più grande sarà il vantaggio di leva tanto minore sarà la forza che noi dovremo impiegare.

9.4 - Rotazioni ed energia.

Il moto di rotazione di un corpo attorno al proprio baricentro è, dal punto di vista energetico, né più né meno un moto: questo implica che, anche ad un corpo in rotazione, è possibile associare un'energia legata allo stato di moto del corpo. Inoltre, gli elementi di massa di un corpo in rotazione subiscono l'azione di una forza centripeta: dunque possiamo definire anche una energia potenziale legata al moto di rotazione.

9.4.1 - L'energia cinetica rotazionale.

L'**energia cinetica rotazionale**, è la somma dell'energia cinetica dovuta al moto di rotazione di ciascun elemento di massa costituente il corpo rigido, in formule:

$$E_{cr} = \Sigma \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2; \quad (9.22)$$

che, ricordando le (9.4) e (9.8), possiamo riscrivere come:

$$E_{cr} = \Sigma \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 = \Sigma \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (\omega \cdot r_i)^2 = \Sigma \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \; ; \quad (9.23)$$

che ci dice che l'energia cinetica posseduta da un corpo in rotazione è pari a metà del suo momento d'inerzia (rispetto all'asse di rotazione), per il quadrato della sua velocità angolare.

9.4.2 - L'energia potenziale rotazionale (nei sistemi momento-isolati).

Come sottolineato nel capitolo precedente, nei sistemi momento-isolati si conserva il momento della quantità di moto. Ma cosa succede all'energia?

Consideriamo un pattinatore che raccolga braccia e gambe durante una rotazione: avremo un momento d'inerzia iniziale massimo ed un momento d'inerzia finale minimo. Le velocità angolari saranno quindi:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{L}/I_i; \quad (9.24a)$$

e

$$\boldsymbol{\omega}_f = \boldsymbol{L}/I_f. \quad (9.24b)$$

Le corrispondenti energie cinetiche rotazionali saranno dunque:

$$E_{cri} = I_i \cdot \omega_i^2/2 = I_i \cdot (L/I_i)^2/2 = L^2/(2 \cdot I_i); \quad (9.25a)$$

e

$$E_{crf} = I_f\,\omega_f^2/2 = I_f\,(L/I_f)^2/2 = L^2/(2\cdot I_f);\ (9.25b)$$

che, nel nostro esempio, corrispondono ad una energia iniziale minima e ad una energia finale massima. Ma da dove è venuta l'energia necessaria per realizzare questa variazione?

La variazione di energia viene dal lavoro delle forze ‘centripete’, ovvero dal lavoro delle forze che ‘trattengono’ le parti del corpo in rotazione, vicine all'asse di rotazione.

Queste forze non compiono lavoro finché le parti del corpo in rotazione mantengono costante la loro distanza dall'asse: lo spostamento, in questo caso, è sempre perpendicolare alla loro direzione. Se però voglio cambiare il momento d'inerzia devo variare la distanza dall'asse di parte del corpo e nel farlo le forze centripete compiono del lavoro.

Nel caso del pattinatore, l'energia trasformata dal lavoro delle forze centripete in energia cinetica rotazionale è energia biomeccanica, ovvero l'energia prodotta dai suoi muscoli.

10 - La gravitazione universale.

La legge della gravitazione universale rappresenta uno dei massimi traguardi storici nell'acquisizione della conoscenza scientifica: la stessa impossibilità di operare esperimenti di dimensione planetaria era un evidente enorme ostacolo alla possibilità di giungere alla corretta determinazione di questa legge.

Essa costituisce quindi una grande prova della capacità deduttiva degli scienziati che si sono succeduti nello studio del fenomeno, dai matematici greci ad Albert Einstein.

10.1 - Il punto di vista relativistico: lo stato dell'arte.

La legge della gravitazione universale si esprime, nella sua forma più completa, nel quadro della relatività generalizzata di Einstein, laddove si considera il moto di un pianeta come un moto rettilineo uniforme che avviene in uno spazio deformato dalla presenza di altri corpi celesti (pianeti, stelle, buchi neri...).

Lo strumento matematico necessario per descrivere questo moto è estremamente complesso e fuori della portata di questo corso: fortunatamente, però, esiste la possibilità di riportare la legge relativistica in un'ottica Newtoniana, ovvero di descrivere l'interazione relativistica fra i corpi attraverso una forza. In particolare si trova che la forza con la quale un corpo di massa m_1 viene attratto da un corpo di massa m_2, segue la relazione:

$$F = G\cdot \frac{m_1\cdot m_2}{d^2}\left(1 + A\cdot \frac{G\cdot m_1\cdot m_2}{d\cdot m_1\cdot c^2} + B\cdot \left(\frac{G\cdot m_1\cdot m_2}{d\cdot m_1\cdot c^2}\right)^2 + \ldots\right); \quad (10.1)$$

nella quale A, B ed i seguenti sono opportuni coefficienti numerici, d rappresenta la distanza fra i baricentri dei due corpi, mentre G è la **costante di gravitazione universale** e vale:

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2. \quad (10.2)$$

La legge della gravitazione universale è valida per qualunque coppia di corpi ma la (10.1) ci dice che, a causa del ridottissimo valore di G, le interazioni gravitazionali sono trascurabili se almeno uno dei due corpi coinvolti non ha una massa rilevante, come quella dei pianeti e degli altri corpi celesti.

10.2 - L'energia del sistema e l'approssimazione di Newton.

Il rapporto fra le diverse forme di energia in gioco nel sistema dei corpi legati dall'attrazione gravitazionale ha una notevole importanza.

Iniziamo col definire l'energia potenziale gravitazionale utilizzando la (10.1).

10.2.1 - L'energia potenziale gravitazionale.

Abbiamo già parlato dell'energia potenziale gravitazionale quando abbiamo affrontato la forza peso. In quel contesto avevamo affermato che l'energia potenziale gravitazionale è la misura del massimo lavoro che la forza peso agente su un corpo può compiere, e questa segue la relazione (3.1). Ma l'attrazione gravitazionale si esprime attraverso la forza peso solo quando il corpo si trova in prossimità della superficie terrestre.

Più in generale si può definire l'energia potenziale gravitazionale a partire dalla (10.1) e, in questo caso, la si rappresenta come **la misura del lavoro che la forza di gravità ha compiuto sui corpi per portarli a quella distanza**, ovvero **l'energia che è necessario trasmettere ai corpi per 'liberarli" dal legame dovuto all'attrazione gravitazionale**. Applicando la definizione si trova che l'energia potenziale gravitazionale, dovuta alla gravitazione universale, segue la relazione:

$$E_p = -G\cdot m_1\cdot m_2/d. \quad (10.3)$$

Seppure possa sembrare strano che l'energia potenziale sia negativa, vi è un motivo pratico estremamente semplice per il quale si è compiuta questa scelta: il lavoro necessario ad annullare la distanza dei due corpi, ovvero il massimo lavoro che il sistema è in grado di compiere, è infinito.

Questo non significa che il lavoro della forza di gravità nel far cade un corpo su un altro sia infinito: ogni corpo reale ha un raggio che rende sempre maggiore di zero la distanza dei due baricentri e quindi finito il lavoro necessario per giungere all'impatto. Purtroppo questo implica che, il massimo lavoro che la forza può compiere, dipende dal raggio degli oggetti in gioco! Considerando il lavoro compiuto nel far avvicinare i corpi, si cancella questa fastidiosa dipendenza da un'ulteriore grandezza fisica.

10.2.2 - L'approssimazione di Newton.

Isaac Newton, due secoli prima della nascita del modello relativistico, aveva determinato che fra due corpi di masse m_1 ed m_2, doveva agire la forza:

$$F = G\cdot \frac{m_1\cdot m_2}{d^2}; \quad (10.4)$$

ovvero che "*due corpi si attraggono fra di loro con una forza pari al prodotto delle loro masse per* *la costante di gravitazione universale, diviso il quadrato della distanza dei loro baricentri*".

La relazione di Newton è un'approssimazione di quella relativistica nella quale si è considerato pari ad 1 il valore dei termini fra parentesi presenti nella (10.1). Questa condizione si può ritenere verificata quando ci si trova nella condizione:

$$G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{d} << m_1\cdot c^2; \quad (10.5)$$

ovvero quando **l'energia potenziale gravitazionale**, ovvero l'energia necessaria per sciogliere il legame gravitazionale fra i due corpi, **è molto minore dell'energia materica di cui è costituito il corpo con massa minore**. Già nella teoria della relatività ristretta, infatti Einstein aveva determinato che, l'energia equivalente ad una massa m segue la relazione:

$$E_m = m\cdot c^2. \quad (10.6)$$

La condizione di validità della (10.4) è in generale verificata per quanto riguarda i pianeti del sistema solare, quindi per quanto riguarda i soli corpi che si potessero osservare chiaramente ai tempi di Newton.

10.3 - Il moto dei pianeti nel sistema solare.

Data la loro vicinanza, il moto dei pianeti è stato il primo fenomeno, governato dalla legge della gravitazione universale, ad essere stato studiato dall'uomo, subito dopo la caduta dei corpi.

10.3.1 - Le leggi di Keplero.

Giovanni Keplero (1571-1630) fu uno dei maggiori studiosi del sistema solare. Egli, grazie alle misure incredibilmente precise che il suo maestro, l'astrologo danese Tycho Brahe, aveva raccolto in venticinque anni di osservazioni e gli aveva lasciato in eredità, determinò tre leggi che governano il moto dei pianeti:

prima: *"il moto dei pianeti attorno al sole descrive una traiettoria ellittica (detta orbita), rispetto alla quale il sole occupa uno dei due fuochi";*

seconda: *"Il raggio che va dal sole al pianeta spazza sempre la stessa area in un'unità di tempo (costanza della velocità areolare)";*

terza: *"il moto di tutti i pianeti avviene con il medesimo rapporto fra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita ed il quadrato del periodo di rivoluzione".*

Sebbene l'idea che aveva spinto Keplero alla determinazione di queste tre leggi fosse sbagliata, le tre leggi furono un fermo riferimento per le ricerche di Newton e lo sviluppo della sua teoria delle forze: la dinamica.

10.3.2 - Newton e la legge della gravitazione.

Newton, studiando il fenomeno degli urti, aveva intuito il principio di reciproca azione ed ipotizzato la validità del secondo principio della dinamica, ovvero della relazione (4.2).

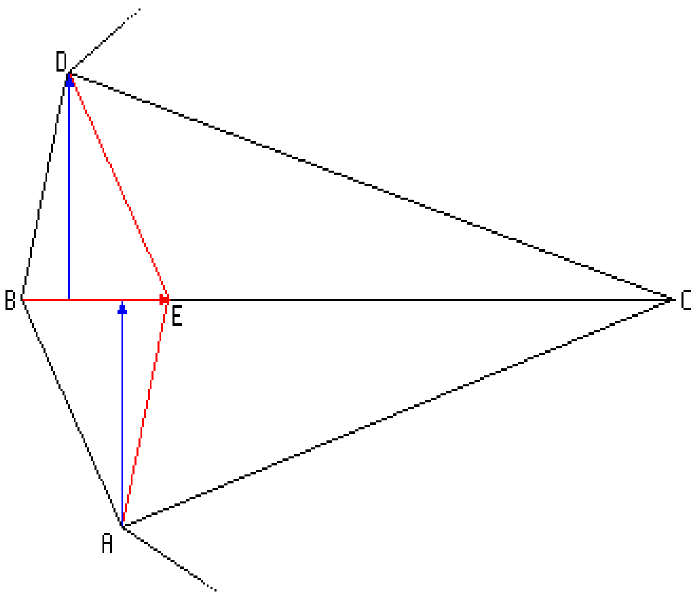
Dato che, come aveva osservato Galileo, l'accelerazione in prossimità della superficie terrestre è costante, deve essergli sembrato naturale che l'attrazione gravitazionale dovesse essere proporzionale al prodotto delle masse; in questo caso, infatti, si ricava che l'accelerazione dipende solo dalla massa del pianeta ed è indipendente dalla massa del corpo:

$$a = F/m \approx m_T m/m = m_T. \quad (10.7)$$

Newton ora doveva solo verificare la compatibilità dell'ipotesi della teoria delle forze con le leggi di Keplero. Se la teoria delle forze era corretta, l'interazione fra sole e pianeta doveva avvenire nella direzione sole-pianeta, ovvero lungo il raggio.

Per prima cosa, quindi, era necessario verificare la consistenza dell'ipotesi dell'accelerazione, e quindi della forza, centripeta con la costanza della velocità areolare.

Ragionando su una spezzata, che approssima la traiettoria reale, è possibile verificare che, considerato lo spostamento AB compiuto in una unità di tempo e quello BD compiuto nell'unità di tempo successiva, abbiamo che l'accelerazione centripeta lascia invariata la componente perpendicolare al raggio della velocità, garantendo che le due aree spazzate dal raggio, le aree dei triangoli ABC e BCD, siano uguali (stessa base, il lato BC, e stesse altezze, le componenti perpendicolari al raggio della velocità).

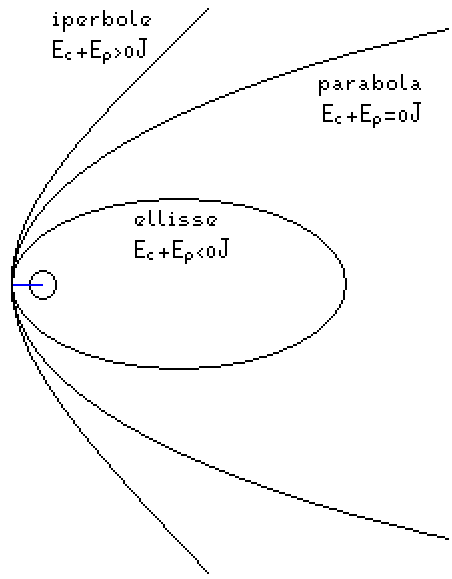


Lo stesso discorso può essere ripetuto per ogni raggio con il medesimo risultato: **la sola azione di una forza centrale rende costante la velocità areolare**.

Il secondo passo era verificare che l'azione di una forza centrale fosse compatibile con un'orbita ellittica. La dimostrazione è estremamente complessa, oltre le necessità di questo corso, ed è un vero e proprio capolavoro di geometria.

10.3.3 - L'energia e le orbite nell'approssimazione di Newton.

Newton non determinò solo la forma della forza di gravità semplificata: attraverso una successiva dimostrazione provò che qualunque conica (ellissi, parabole o iperbole) è compatibile con la (10.4). Quale sia la forma dell'orbita che il corpo celeste seguirà dipende dal rapporto fra l'energia potenziale gravitazionale, ovvero l'energia che lega i due corpi, e l'energia cinetica in gioco, l'energia che i corpi hanno a disposizione per ‘liberarsi’ dal legame. In particolare Newton dimostrò che:



1 - se $E_c + E_p < 0$ l'orbita sarà ellittica;

2 - se $E_c + E_p = 0$ l'orbita sarà parabolica;

3 - se $E_c + E_p > 0$ l'orbita sarà iperbolica.

Le due energie in gioco raggiungono i valori estremi (massimo per la cinetica e minimo per la potenziale) nel punto dell'orbita in cui i due corpi celesti sono più prossimi l'uno all'altro.

Per i corpi che orbitano attorno al sole, il punto dell'orbita ad esso più vicino si chiama *perielio* (nelle orbite ellittiche, il punto più lontano si chiama *afelio*; allo stesso modo nell'orbita lunare si individuano il *perigeo* e l'*apogeo*). Dunque, **tutti i pianeti del sistema solare verificano la condizione 1, di orbita ellittica**, ovvero, **non hanno energia sufficiente per liberarsi del legame gravitazionale** con il sole.

Naturalmente Newton non parlava ancora di energia, ai suoi tempi nessuno aveva ancora introdotto questa grandezza, ma il rapporto che egli aveva determinato era fra il quadrato della velocità, proporzionale all'energia cinetica, e il prodotto fra accelerazione centripeta e distanza, proporzionale all'energia potenziale.

11 - I fluidi.

In Fisica non si studiano soltanto i corpi rigidi: una delle branche più consistenti della meccanica è lo studio dei fluidi.

Si considerano fluidi tutte le sostanze che tendono a prendere la forma del contenitore in cui sono posti. Alla categoria appartengono i gas, che occupano l'intero volume interno del contenitore che li ospita, e i liquidi, che occupano soltanto la parte inferiore di tale volume.

La nostra introduzione alla meccanica dei fluidi parte, ovviamente, dall'energia.

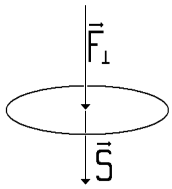
11.1 - La conservazione dell'energia e la legge di Bernoulli.

Anche per un certo volume di fluido, in quanto sistema fisico, è applicabile il principio di conservazione dell'energia; definiamo, quindi, rapidamente alcune grandezze che ci saranno utili e ricaviamo, dal principio di conservazione, la più semplice legge della fluidodinamica: la legge di Bernoulli, valida per fluidi in moto stazionario.

11.1.1 - Forza e pressione.

La prima grandezza che ci serve è la pressione che è, per definizione, la forza esercitata su una unità di superficie:

$$p = \frac{F\perp}{S} ;\ (11.1)$$



nella quale $F\perp$ è la forza totale esercitata perpendicolarmente alla superficie di area S.

Dalla definizione si ricava una semplicissima relazione che lega pressione e forza:

$$\boldsymbol{F}\perp = p\cdot\boldsymbol{S};\ (11.2)$$

nella quale con $\boldsymbol{S}$ abbiamo indicato il vettore superficie, ovvero il vettore con direzione perpendicolare alla superficie, verso entrante in essa e modulo pari alla sua area.

Questo vettore ci permette anche di ricavare in modo semplice la misura del volume di fluido che attraversa una sezione generica di superficie $\boldsymbol{S}$ passando oltre di un tratto $\boldsymbol{s}$:

$$V = \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{s};\ (11.3)$$

nella quale con ***s*** abbiamo indicato il vettore spostamento medio del fluido.

Con analogo significato dei simboli, possiamo ottenere la misura del lavoro compiuto da una pressione su di una certa superficie; troviamo infatti che vale la relazione:

$$L = \mathbf{F}_\perp \times \mathbf{s} = p \cdot \mathbf{S} \times \mathbf{s} = p \cdot V. \quad (11.4)$$

11.1.2 - La portata.

La seconda grandezza che ci serve è la portata e rappresenta il volume di fluido che attraversa una sezione della conduttura in una unità di tempo. In formule:

$$Q_v = \frac{V}{t}; \quad (11.5)$$

oppure, ricordando la (11.3):

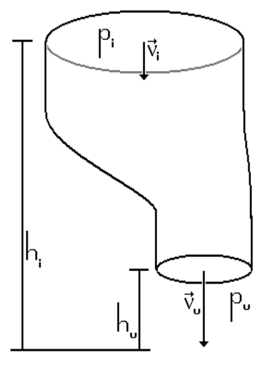
$$Q_v = \frac{V}{t} = \mathbf{S} \times \frac{\mathbf{s}}{t} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}; \quad (11.6)$$

nella quale con ***s*** abbiamo indicato il vettore spostamento medio del fluido e con ***v*** il vettore velocità media del fluido all'attraversamento della sezione di superficie ***S***.

La ragione per la quale non si utilizza la velocità del fluido è che questa, considerando una certa sezione della conduttura, non è uniforme e, inoltre, risente di qualunque variazione nella misura della sezione della conduttura stessa.

Il moto del fluido può, però, essere stazionario, ovvero avvenire con velocità puntuali del fluido costanti nel tempo.

Dato che la conduttura è rigida, quello che non può cambiare è il suo volume e quindi, quando il flusso diventa stazionario, il volume di fluido che entra nella conduttura in una unità di tempo non può che essere pari al volume che ne esce.



11.1.3 - La legge di Bernoulli.

Immaginiamo, ora, una conduttura di sezione iniziale $\mathbf{S}_i$ alla quota $\mathbf{h}_i$ e sezione finale $\mathbf{S}_f$ alla quota $\mathbf{h}_f$ e consideriamo un fluido che vi scorra attraverso con flusso stazionario.

Per semplicità consideriamo nulli tutti gli attriti interni, che vedremo in seguito come considerare, e consideriamo quindi che il lavoro totale compiuto sul fluido nella conduttura sia la somma di quello compiuto dalla pressione agente agli estremi di questa e di quello compiuto dalla forza peso. Dalla (11.4) ricaviamo che il lavoro totale compiuto sul fluido dalle pressioni sarà:

$$L_{pr} = L_i\text{-}L_u = p_i \cdot V_i\text{-}p_u \cdot V_u; \ (11.7)$$

che, in accordo con l'assunzione di flusso stazionario, possiamo anche scrivere come:

$$L_{pr} = (p_i\text{-}p_u) \cdot V; \ (11.8)$$

mentre quello compiuto dalla forza peso sarà l'opposto della variazione dell'energia potenziale gravitazionale, ovvero:

$$L_p = m \cdot g \cdot h_i\text{-}m \cdot g \cdot h_u = \rho \cdot V_i \cdot g \cdot h_i\text{-}\rho \cdot V_u \cdot g \cdot h_u = (\rho \cdot g \cdot h_i\text{-}\rho \cdot g \cdot h_u) \cdot V; \ (11.9)$$

nella quale con ρ abbiamo indicato la densità del fluido.

Ora possiamo osservare che, in accordo col teorema dell'energia cinetica, dovrà valere la relazione:

$$L_{pr} + L_p = \Delta E_c; \ (11.10)$$

ovvero:

$$(p_i\text{-}p_u) \cdot V+(\rho \cdot g \cdot h_i\text{-}\rho \cdot g \cdot h_u) \cdot V = \frac{1}{2} m \cdot v_u^2\text{-} \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_u^2\text{-} \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v_i^2; \ (11.11)$$

dalla quale, dividendo per V ambo i membri e riordinando i termini, ricaviamo:

$$p_i+\rho \cdot g \cdot h_i+ \frac{1}{2} \rho \cdot v_i^2 = p_u+\rho \cdot g \cdot h_u+ \frac{1}{2} \rho \cdot v_u^2; \ (11.12)$$

che possiamo generalizzare scrivendo la relazione:

$$p+\rho \cdot g \cdot h+ \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = cost; \ (11.13)$$

nota come *legge di Bernoulli*.

Diremo quindi che “per un fluido che scorra con flusso stazionario in ogni punto del suo volume è costante la somma della sua pressione con la sua densità di energia potenziale e con la sua densità di energia cinetica”.

11.2 - Statica dei fluidi.

La legge di Bernoulli è valida per fluidi in moto stazionario. Così come un corpo fermo può essere visto come un corpo che si muove con velocità costantemente nulla, allo stesso modo un fluido fermo può essere visto come un fluido che scorre con portata costantemente nulla: in altre parole possiamo applicare la legge di Bernoulli anche ad un fluido in equilibrio statico.

11.2.1 - Il principio di Pascal.

Consideriamo un fluido in equilibrio statico: la velocità locale del fluido sarà nulla e quindi sarà nulla la sua densità di energia cinetica. Potremo quindi riscrivere la legge di Bernoulli nella forma:

$$p+\rho\cdot g\cdot h = cost; \quad (11.14)$$

che, se consideriamo una quota costante all'interno del fluido, possiamo riscrivere nella forma:

$$p+\rho\cdot g\cdot h = p+cost_1 = cost; \quad (11.15)$$

ovvero:

$$p = cost_2; \quad (11.16)$$

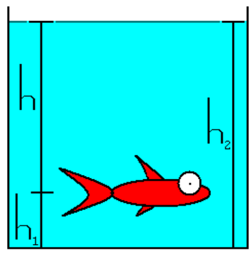
ottenendo una legge nota come *principio di Pascal*.

Cosa aggiunge, a ciò che sapevamo, il principio di Pascal? Se in quel punto del fluido noi poniamo una superficie ***S*** abbastanza piccola da poter considerare costante la pressione agente su di essa, allora, per la (11.2), otterremo che la forza esercitata dalla pressione del fluido sulla superficie non dipende da come questa è orientata. In altre parole il principio di Pascal ci dice che la pressione agisce nello stesso modo in ogni direzione.

11.2.2 - La legge di Stevino.

Se riprendiamo in considerazione la (11.14) e consideriamo due diverse quote, otteniamo la:

$$p_1+\rho\cdot g\cdot h_1 = p_2+\rho\cdot g\cdot h_2; \quad (11.17)$$



dalla quale osserviamo facilmente che la pressione all'interno di un fluido cresce al ridursi della quota a cui ci si trova. Con una semplice rielaborazione otteniamo la:

$$p_1-p_2 = \rho\cdot g\cdot h_2-\rho\cdot g\cdot h_1 = \rho\cdot g\cdot(h_2-h_1) \quad (11.18)$$

nella quale p_1-p_2 è la variazione della pressione passando dalla quota 2 alla quota 1 mentre h_2-h_1 è lo spessore di fluido che separa le due quote. Se dunque consideriamo come quota 2 la superficie del fluido e come quota 1 una quota all'interno del fluido troviamo che vale la relazione:

$$p = \rho\cdot g\cdot h; \quad (11.19)$$

nota come *legge di Stevino*, che ci dice che **la pressione *p* dovuta ad un fluido alla profondità *h* è**

pari alla densità di energia potenziale del fluido alla profondità considerata.

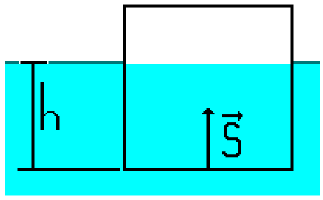
11.2.3 - La legge di galleggiamento di Archimede.

Consideriamo un corpo, per esempio un cubo, che galleggi in un fluido. Data la simmetria del corpo la pressione esercitata sulle pareti laterali produrrà una forza nulla e, per la (11.19) la pressione esercitata dal fluido sulla faccia inferiore del cubo dovrà essere pari alla densità di energia potenziale alla profondità alla quale questa viene a trovarsi.

Il corpo rimane fermo, quindi si trova sottoposto all'azione di forze in equilibrio: orizzontalmente agisce solo la pressione che, sulle facce laterali, da quattro contributi a coppie opposti, mentre in verticale deve essere verificato l'equilibrio fra la forza peso e la spinta della pressione sulla faccia inferiore.

Quindi l'equazione che esprime l'equilibrio delle forze agenti sul nostro corpo, sarà:

$$\boldsymbol{F}_{tot} = \boldsymbol{F}_p + \rho \cdot g \cdot h \cdot \boldsymbol{S} = 0N; \quad (11.20)$$



nella quale $\boldsymbol{S}$ è in vettore superficie della faccia inferiore del nostro cubo.

Ricordando la (11.3) e considerando che la superficie $\boldsymbol{S}$ ha la stessa direzione e verso opposto a quello di $\boldsymbol{g}$, possiamo riscrivere la (11.20) come:

$$\boldsymbol{F}_{tot} = \boldsymbol{F}_p - \rho \cdot \boldsymbol{g} \cdot V = 0N; \quad (11.21)$$

nella quale con V abbiamo indicato il volume del fluido ora occupato dal corpo galleggiante. La (11.21), nota come *legge del galleggiamento di Archimede*, ci dice che **la forza esercitata da un fluido su di un corpo immerso in esso è l'opposto della forza peso agente sulla massa di fluido spostato**.

Se ora esplicitiamo la forza peso nelle sue componenti, indicando la massa del corpo come il prodotto del suo volume per la sua densità troviamo che la (11.20) può essere riscritta come:

$$\mathbf{F}_{tot} = \rho_c \cdot V_c \cdot \mathbf{g} - \rho \cdot \mathbf{g} \cdot V = 0N; \quad (11.22)$$

dalla quale possiamo eliminare **g** e, dato che il volume del corpo immerso è inferiore all'intero volume del corpo, ricaviamo la condizione di galleggiamento:

$$\rho_c < \rho; \quad (11.23)$$

ovvero abbiamo che **il corpo galleggia se la sua densità media è inferiore a quella del fluido**.

Se il corpo è completamente immerso, dalla (11.22) ricaviamo che sarà soggetto ad una forza totale pari a:

$$\mathbf{F}_{tot} = (\rho_c-\rho)\cdot\mathbf{g}\cdot V; \ (11.24)$$

che sarà positiva, rivolta verso il basso, quando la densità del corpo è maggiore di quella del fluido, e quindi il corpo affonda, come un sasso in acqua, e rivolta in alto in caso contrario, come nel caso del fuoco, o di una mongolfiera, o dei palloncini gonfiati ad elio, o delle bolle in acqua...

11.3 - Fluidi in moto stazionario.

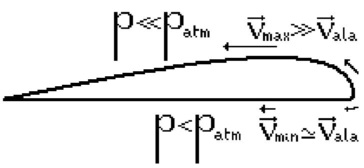
Analizziamo ora i fenomeni, le situazioni e le leggi tipiche e particolari nelle quali abbiamo un fluido in moto stazionario.

11.3.1 - Quota costante.

Osserviamo ora un fluido in moto stazionario attraverso due punti alla stessa quota.

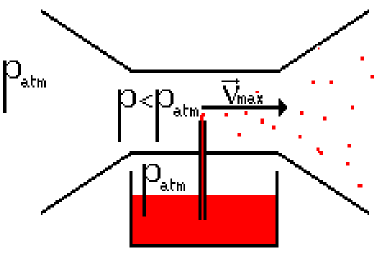
In questo caso abbiamo che, nella (11.12), risulta uguale, in ambo i punti, la densità di energia potenziale, che può quindi essere eliminata da ambo i membri dell'equazione dandoci la legge:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_2^2; \ (11.25)$$



che ci dice che, alla stessa quota, la pressione di un fluido in un punto è tanto più grande quanto più il fluido, in quel punto, è lento.

La (11.25) rende ragione di alcuni fenomeni come, ad esempio, la forza, agente verso l'alto, generata su un'ala. I profili alari, infatti, sono rigonfi verso l'alto, al preciso scopo di massimizzare la differenza di velocità fra il flusso d'aria sotto l'ala, più lento, e quello sopra, più veloce. Un altro tipico fenomeno è il 'risucchio' che l'acqua di un fiume esercita verso il suo centro: quando un corpo viene appoggiato sulla sua superficie viene risucchiato verso il centro dalla differenza di pressione fra le superfici rivolte a riva, in acque più lente, e le superfici rivolte verso il centro del fiume, in acque più veloci.



Uno strumento geniale, basato sulla (11.25) è il tubo di Venturi. Questo consiste in un tubo orizzontale strozzato al centro: riducendo la sezione, a portata costante, il fluido deve aumentare la propria velocità e la pressione si riduce abbastanza da permettere il risucchio di una sostanza da un ago cavo che si apra al centro della strozzatura. Il tubo di Venturi era l'elemento base per la costruzione dei carburatori, ovvero dei dispositivi che miscelavano aria e combustibile nei motori a scoppio prima che venisse introdotto l'iniettore.

11.3.2 - Pressione costante.

Osserviamo ora un fluido in moto stazionario attraverso due punti nei quali sia uguale la pressione misurata.

In questo caso abbiamo che nella (11.12) risulta uguale la pressione in ogni punto. Questa può quindi essere eliminata da ambo i membri dell'equazione e il risultato è che il fenomeno risulta governato dall'equazione:

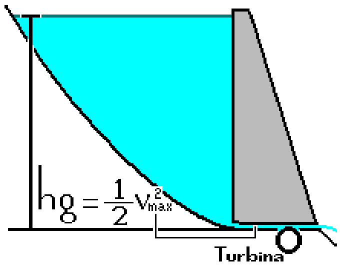
$$\rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 = \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2; \quad (11.26)$$

che, eliminando ρ, diventa:

$$g \cdot h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = g \cdot h_2 + \frac{1}{2} v_2^2; \quad (11.27)$$

che ci dice che, alla stessa pressione, la velocità di un fluido in un punto è tanto più grande quanto più quel punto si trova in basso.

La (11.26) rende ragione di un fenomeno estremamente semplice: consideriamo un contenitore di un fluido, ad esempio una brocca d'acqua, e pratichiamo un foro sulla sua superficie, al di sotto del livello dell'acqua. Sia la superficie libera dell'acqua sia il foro, si affacciano sull'aria, a pressione atmosferica: il risultato è che la velocità con cui l'acqua uscirà dal foro sarà tanto maggiore quanto più il foro sarà in basso.



Un esempio reale nel quale si sfrutta questo fenomeno sono le dighe delle centrali idroelettriche: la turbina trasforma l'energia cinetica dell'acqua in energia elettrica e per questo viene posta il più possibile in basso, con un bacino il più possibile ‘alto’.

11.3.3 - Gli attriti interni.

Come abbiamo detto all'inizio, nell'applicare il principio di conservazione dell'energia abbiamo trascurato l'effetto degli attriti interni.

In effetti, un fluido che scorre in un tubo è come un corpo la cui superficie strisci su quella di un altro corpo generando, quindi, attrito radente. Lo stesso è vero per lo strato di fluido a contatto con quello a contatto col tubo e per ciascuno strato di fluido successivo per quello immediatamente precedente. Il risultato sarà che lo strato di fluido a diretto contatto col tubo sarà il più lento, quello subito successivo sarà un po' più veloce e così via fino a quello più interno e più veloce di tutti.

Come sempre, però, quello che ci interessa è il risultato dal punto di vista energetico. In particolare pensiamo ora ad un fluido che si muova in una conduttura orizzontale, con sezione costante, perché spinto attraverso questa da una diversa pressione ai capi della conduttura. Se il flusso è stazionario, la velocità del fluido dovrà essere la stessa in ingresso ed in uscita. Quindi violeremmo l'uguaglianza prevista dalla (11.12) a meno di non correggerla in questo modo:

$$p_i+\rho\cdot g\cdot h_i+\frac{1}{2}\rho\cdot v_i^2 = p_u+\rho\cdot g\cdot h_u+\frac{1}{2}\rho\cdot v_u^2+\frac{E_t}{V}\text{ ; (11.28)}$$

nella quale con E_t abbiamo indicato l'energia cinetica trasformata in energia termica dal lavoro degli attriti. Allora, nella situazione descritta ricaveremo che:

$$E_t = (p_i - p_u)\cdot V\text{; (11.29)}$$

che ci dice che, in questo caso, il lavoro compiuto dalle forze d'attrito è pari alla differenza di pressione che causa il flusso per il volume fluito o, in termini di potenza:

$$P_t = \frac{E_t}{t} = (p_i - p_u)\cdot\frac{V}{t} = (p_i - p_u)\cdot Q_v\text{; (11.30)}$$

che ci dice che, in questo caso, la potenza prodotta dalle forze d'attrito è pari alla differenza di pressione che causa il flusso per la portata.

È anche possibile descrivere la presenza degli attriti attraverso una grandezza detta **resistenza al flusso** e definita come:

$$R = \frac{(p_i - p_u)}{Q_v}\text{ ; (11.31)}$$

che, ad esempio, per un capillare assume la forma:

$$R = \frac{8\cdot\mu\cdot l}{\pi\cdot r^4}\text{ ; (11.32)}$$

nella quale μ è la viscosità del fluido, l è la lunghezza del capillare e r è il raggio della sezione.

A1- Misure ed errori.

Misure ed errori sono il pane quotidiano di qualunque ricercatore: il secondo è imprescindibile dal primo ed il primo è necessario per qualunque ricerca nell'ambito della Fisica.

A1.1 - La misura.

La misura è il processo con il quale si associano alle grandezze dei valori numerici. Tale processo procede per confronto fra la grandezza da misurare e l'unità di misura utile per quella grandezza, con lo scopo di determinare il multiplo dell'unità di misura che meglio descrive la dimensione della nostra grandezza.

A1.1.1 - Gli strumenti di misura.

L'esempio più emblematico è la misura di una lunghezza. Poniamo di voler misurare la lunghezza del lato di un tavolo usando come unità di misura la lunghezza di una penna. Avendo a disposizione tante penne, tutte uguali, non serve altro che allinearle lungo il bordo del tavolo fino a che la fila combaci con la lunghezza del lato. La misura è pari al numero di penne che abbiamo messo in fila. Ovviamente, più l'unità è piccola più facile sarà trovare una corrispondenza più o meno esatta fra la lunghezza della fila e quella del lato del tavolo. Ma, se sarebbe scomodo andare in giro con una borsa piena di aste lunghe un metro, non sarebbe più comodo portarsi dietro un sacchetto pieno di tasselli larghi un centimetro o un millimetro. Inoltre, in questo caso, unità di misura più piccole implicherebbero conteggi più noiosi! Ecco perché si sono realizzati supporti di varie lunghezze con tacche che indicano le suddivisioni più piccole ed il numero delle tacche, almeno di alcune, già riportato sul supporto.

Non tutti gli strumenti di misura realizzano un confronto diretto fra la grandezza da misurare e l'appropriata unità di misura: alcuni realizzano una misura indiretta sfruttando la dipendenza della grandezza che viene effettivamente misurata dalla misura della grandezza che si vuole misurare. I termometri, ad esempio, non confrontano temperature diverse ma misurano la variazione di grandezze facilmente misurabili che dipendono dalla temperatura del termometro. Il classico termometro a fluido, quello a mercurio o ad alcool, sfrutta la dilatazione del fluido e ne misura il volume fornendo il valore che la temperatura del termometro deve avere perché il fluido assuma quello specifico volume.

Gli strumenti di misura hanno diverse caratteristiche. Quelle che ci interessano maggiormente sono la **portata**, minima e massima e la **sensibilità**.
La **portata** minima è la più piccola misura che la scala dello strumento permette di compiere mentre la portata massima è la misura più grande che la scala dello strumento permette di compiere

(in una sola misurazione). Ad esempio: un termometro che ha una scala che va da -20 °C (gradi Celsius, dal nome di Anders Celsius, 1701-1744, fisico e astronomo svedese) a 50 °C, ha una portata minima di -20 °C ed una portata massima di 50 °C. Un metro ha sempre una portata minima di 0 m, ed una massima che dipende dalla lunghezza dello strumento.
La **sensibilità** è la minima differenza rilevabile utilizzando la scansione in tacche presente sullo strumento. Ad esempio: metri molto lunghi (normalmente morbidi ed avvolgibili detti "*bindelle metriche*"), hanno una scansione in centimetri: non sono riportate le tacche dei millimetri che sono invece presenti sui metri avvolgibili in metallo o su quelli pieghevoli in legno; mentre i primi hanno una sensibilità del centimetro i secondi hanno una sensibilità del millimetro. Alcuni righelli hanno una tacchetta più piccola fra le tacchette dei millimetri: la loro sensibilità è di mezzo millimetro.

A1.2 - Gli errori di misura.

Dato che è improbabile una perfetta corrispondenza fra la dimensione della grandezza che vogliamo misurare ed il valore della misura che ne facciamo, tutte le misure sono affette da un errore almeno pari alla sensibilità dello strumento che abbiamo utilizzato. Se poi la misura richiede una serie di operazioni più complesse che possono alterare i risultati ottenuti, allora aumenta la probabilità che si compia un errore. Torniamo al tavolo di cui vogliamo misurare la lunghezza del lato: se utilizzo un metro la cui portata massima sia maggiore o uguale alla lunghezza che vogliamo misurare, l'errore è pari alla sensibilità del metro, ma se dobbiamo usare un righello con portata massima inferiore alla lunghezza del lato del tavolo, saremo costretti a spostare più volte il nostro righello, introducendo una serie di possibili errori di riposizionamento che vanno ad aumentare l'entità dell'errore.

A1.2.1 - Valore medio ed errore accidentale.

Per ottenere una misura che abbia una maggiore probabilità di essere corretta, i ricercatori sanno di dover compiere molteplici misure. Ogni misura può, infatti, essere affetta da un **errore accidentale**, ovvero da un errore **casuale** che fa sì che le misure effettuate siano tutte diverse, seppur simili. L'errore accidentale può essere per eccesso come per difetto e può essere eliminato facendo il valore medio di molteplici misure della stessa grandezza.

Si considera quindi, come **valore più probabile della grandezza** (misura più probabile), il **valore medio delle misure effettuate** (la misura media), ovvero vale la relazione:

$$m = m_{media} = (m_1 + m_2 + .. + m_n)/n; \quad (A1.1)$$

A1.2.2 - L'errore sistematico.

Vi è un errore che non è possibile eliminare nemmeno aumentando il numero delle misure. Si tratta dell'**errore sistematico**, ovvero dipendente dal sistema.

L'**errore sistematico** può essere di tre tipi: **teorico** (si sta erroneamente trascurando qualche fenomeno che altera le misure ottenute), **strumentale** (ovvero dipendenti da errori di taratura dello strumento in uso o dall'uso di uno strumento inappropriato per la misura richiesta), **personale** (errori commessi da chi compie la misura nell'uso dello strumento o nella lettura della misura).

Gli errori sistematici, a differenza di quelli accidentali, non sono casuali ed influenzano tutte le misure nello stesso modo. Possono, quindi, essere eliminati soltanto prestando estrema attenzione ad ogni aspetto, teorico e pratico, concernente le misure da compiere.

A1.3 - La misura 'completa' dell'errore.

Dato che non esistono misure prive di errori i ricercatori indicano, insieme alle misure, il probabile valore dell'errore.

L'indicazione del probabile errore può essere fatta in modi diversi: indicandone il valore dopo la misura:

$$m = m_{media} \pm \varepsilon_a; \text{ (A1.2.1)}$$

indicando l'entità dell'errore come percentuale della misura:

$$m = m_{media} \pm \varepsilon_{r\%}; \text{ (A1.2.2)}$$

implicitamente, indicando il valore della misura con le sole cifre che hanno un'ordine di grandezza maggiore di quello dell'errore e sono, quindi, 'sicure':

$$m = m_{media} (\pm \varepsilon_a). \text{ (A1.2.3)}$$

In ogni caso ne risulta che **la misura** della grandezza **viene** effettivamente **indicata come un intervallo di valori** probabili.

A1.3.1 - Gli errori assoluti.

L'errore assoluto è il valore reale dell'errore commesso nell'effettuare la misura. In una singola misura coincide con la sensibilità dello strumento utilizzato. In misure in serie della stessa grandezza, l'errore assoluto può scriversi o come **semidispersione** o come **varianza**.

La **semidispersione** è la metà della differenza fra la massima misura e la minima; in questo caso, quindi, l'errore assoluto segue la relazione:

$$\varepsilon_a = (m_{max} - m_{min})/2. \text{ (A1.3)}$$

La **varianza** è la radice quadrata dello scarto quadratico medio, ovvero la radice quadrata del rapporto fra la somma dei quadrati delle differenze fra ogni misura e la misura media, ed il numero delle misure meno uno; in questo caso, quindi, l'errore assoluto segue la relazione:

$$\varepsilon_a = \sqrt{\frac{\Sigma_\iota (m_i - m_{media})^2}{n-1}} \text{. (A1.4)}$$

È ovvio che l'errore assoluto ha la stessa unità di misura della grandezza misurata.

A1.3.2 - Gli errori relativi.

L'errore relativo misura il peso che ha l'errore sulla misura effettuata. Si esprime come valore numerico puro o come valore percentuale.

Come valore numerico puro l'errore relativo è il rapporto fra l'errore assoluto commesso nell'effettuare la misura e la misura media; l'errore relativo segue la relazione:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_a / m_{media}. \text{ (A1.5)}$$

Come valore percentuale l'errore relativo è il valore numerico espresso dalla (A1.5) espresso in percentuale e segue la relazione:

$$\varepsilon_{r\%} = \varepsilon_r \times 100. \text{ (A1.6)}$$

È ovvio che l'errore relativo non ha unità di misura.

A1.3.3 - Misurare e valutare l'errore in pratica.

In generale, comunque si decida di calcolare l'errore assoluto, la misura viene effettuata in questo modo: poniamo di voler misurare la lunghezza del tavolo con un righello. Compiamo un numero *n* arbitrario di misure, più sono meglio è. Queste ci daranno valori diversi, le nostre misure.

Per prima cosa, osserviamo i dati ottenuti ed eliminiamo le due misure estreme, la massima e la minima, che saranno, probabilmente, quelle affette dal maggiore errore accidentale: in questo modo riduciamo le misure utili ad *n-2* ma rimuoviamo i dati meno attendibili.

Successivamente calcoliamo il valore medio delle *n-2* misure rimaste: questo è il valore più attendibile, ovvero, la misura media.

Calcoliamo, poi, l'errore assoluto, secondo la procedura scelta (meglio come varianza), e quello relativo, se necessario. A questo punto siamo in grado di esprimere la misura secondo una delle (A1.2).

A2 - Algebra dei numeri

L'algebra è l'insieme delle regole elementari che si utilizzano per manipolare degli oggetti matematici. In questa appendice ripasseremo l'algebra dei numeri che in Fisica è l'algebra delle grandezze scalari.

A2.1 - Le proprietà delle operazioni

Le operazioni che possono essere fatte su di un numero sono molte, quindi limiteremo il campo del ripasso alle quattro operazioni più l'elevamento a potenza.

Le proprietà di ogni operazione dipendono dall'insieme numerico a cui ci stiamo riferendo. In meccanica usiamo numeri reali e quindi ci riferiremo a questo insieme numerico.

A2.1.1 - Le proprietà dell'addizione

L'operazione base di qualunque insieme numerico, quella che serve per compiere la fondamentale operazione del **contare**, è l'addizione.

I termini dell'addizione si chiamano **addendi**, il suo risultato si chiama **somma**. Il fatto che i termini abbiano lo stesso nome è una chiara indicazione della totale equivalenza del loro ruolo. Questo determina il fatto che si possa violare l'ordine dei termini nelle singole addizioni o l'ordine delle addizioni in una serie e ne derivano le due proprietà fondamentali:

proprietà commutativa: $a+b = b+a$;
proprietà associativa: $a+b+c = a+(b+c)$;

(approfittiamo della presenza della proprietà associativa per ricordare che le operazioni si effettuano, a meno della presenza di parentesi, nell'ordine in cui sono scritte e quindi vale l'uguaglianza: $a+b+c = (a+b)+c$, indipendentemente da qualunque proprietà).

Non tutti i termini hanno lo stesso peso, il numero che spesso produce effetti particolari è lo zero. Nell'addizione lo zero...non ha peso. Ne scaturisce la seguente proprietà:

proprietà di esistenza dell'elemento neutro: $a+0 = a$;

dalla quale consegue che per ogni numero, diverso da zero, possiamo definire l'inverso rispetto all'addizione:

proprietà di esistenza degli elementi inversi: $a+(-a) = 0$.

L'inverso di un numero rispetto all'addizione si dice **opposto** del numero considerato.

Notiamo che la proprietà di esistenza dell'elemento inverso ci permette di interpretare la differenza come somma fra il sottraendo e l'opposto del sottrattore:

$$a-b = a+(-b);$$

da cui nasce la possibilità di considerare la differenza come un caso particolare di somma. Ovviamente questo può essere fatto solo per insiemi numerici che comprendano i numeri negativi.

A2.1.2 - Le proprietà della sottrazione

La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.

I termini della sottrazione si chiamano **sottraendo** e **sottrattore**, il suo risultato si chiama **differenza**. Il fatto che i termini abbiano nomi diversi è una chiara indicazione della totale differenza del loro ruolo. Questo determina il fatto che non si possa violare l'ordine dei termini nelle singole sottrazioni o l'ordine delle sottrazioni in una serie e ne derivano le proprietà:

proprietà anticommutativa: $a-b = -(b-a)$.
proprietà invariantiva: $a-b = (a+c)-(b+c)$.

Anche nella differenza, il numero che spesso produce effetti particolari è lo zero. Vale la seguente proprietà:

proprietà del sottrattore nullo: $a-0 = a$.

Notiamo che la differenza perde le proprietà che permettono di violare l'ordine delle operazioni. Risulta quindi conveniente, in presenza di insiemi numerici che comprendano i numeri negativi, considerare la sottrazione come un caso particolare di addizione.

A2.1.3 - Le proprietà della moltiplicazione

La moltiplicazione non è altro che un modo sintetico per scrivere una serie di addizioni. Vale, infatti, la relazione:

$$a \cdot b = \underbrace{a+a+...+a}_{b\ termini} ;\ (A2.1)$$

I termini della moltiplicazione si chiamano **moltiplicando** e **moltiplicatore**, il suo risultato si chiama **prodotto**. Il fatto che i termini abbiano nomi diversi è una chiara indicazione della differenza del loro ruolo ma, grazie alla diretta derivazione dalla somma, si possono comunque violare l'ordine dei termini nelle singole moltiplicazioni o l'ordine delle moltiplicazioni in una serie e ne derivano le due proprietà fondamentali:

proprietà commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$;
proprietà associativa: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Lo zero, come sempre, produce effetti particolari. Nella moltiplicazione lo zero ha un peso enorme e prevale su qualunque altro termine. Ne scaturisce la seguente proprietà:

proprietà di esistenza dell'elemento assorbente: $a \cdot 0 = 0$.

Qual è, dunque, l'elemento neutro? Nella moltiplicazione l'elemento neutro è l'uno:

proprietà di esistenza dell'elemento neutro: $a \cdot 1 = a$;

da cui consegue che per ogni numero, diverso da zero, possiamo definire l'inverso rispetto alla moltiplicazione:

proprietà di esistenza degli elementi inversi: $a \cdot (1/a) = 1$.

L'inverso di un numero rispetto alla moltiplicazione si dice **reciproco** del numero considerato.

Notiamo che la proprietà di esistenza dell'elemento inverso ci permette di interpretare la divisione come moltiplicazione fra il dividendo e il reciproco del divisore:

$$a/b = a \cdot (1/b);$$

da cui nasce la possibilità di considerare la divisione come un caso particolare di moltiplicazione. Ovviamente questo può essere fatto solo per insiemi numerici che comprendano i numeri razionali.

A2.1.4 - Le proprietà della divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.

I termini della divisione si chiamano **dividendo** e **divisore**, il suo risultato si chiama **quoziente**. Il fatto che i termini abbiano nomi diversi è una chiara indicazione della differenza del loro ruolo. Questo determina il fatto che non si possa violare l'ordine dei termini nelle singole divisioni o l'ordine delle divisioni in una serie e ne deriva l'assenza delle due proprietà. Vale, quindi, solo la seguente proprietà di rielaborazione:

proprietà invariantiva: $a/b = (a \cdot c)/(b \cdot c)$.

Lo zero, come sempre, produce effetti particolari. Nella divisione lo zero dividendo ha un peso enorme e prevale su qualunque altro termine. Ne scaturisce la seguente proprietà:

proprietà del dividendo nullo: $0/b = 0$;

Non è possibile dividere per zero: sarebbe come chiedersi quanta torta devo dare agli ospiti che non ho.

Anche l'uno ha un ruolo particolare nella divisione:

proprietà del divisore unitario: $a/1 = a$.

Notiamo che la divisione perde due proprietà rispetto alla moltiplicazione ed ha dei limiti nella possibilità di applicare l'esistenza dell'elemento neutro e dell'elemento assorbente. Risulta quindi conveniente, in presenza di insiemi numerici che comprendano i numeri razionali, considerare la divisione come un caso particolare di moltiplicazione.

A2.1.5 - Le proprietà dell'elevamento a potenza

L'elevamento a potenza non è altro che un modo sintetico per scrivere una serie di moltiplicazioni. Vale, infatti, la relazione:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\ termini} \quad ; \text{(A2.2)}$$

I termini dell'elevamento a potenza si chiamano **base** ed **esponente**, il suo risultato si chiama **potenza**. Il fatto che i termini abbiano nomi diversi è una chiara indicazione della differenza del loro ruolo. Questo determina il fatto che non si possa violare l'ordine dei termini nei singoli elevamenti a potenza o l'ordine degli elevamenti in una serie e ne deriva l'assenza delle due proprietà.

Lo zero, come sempre, produce effetti particolari. Nell'elevamento a potenza lo zero ha un peso enorme, e prevale su qualunque altro termine:

proprietà della base nulla: $0^b = 0, con\ b \neq 0$;
proprietà dell'esponente nullo: $a^0 = 1, con\ a \neq 0$.

Cosa succede se sia la base che l'esponente sono nulli? Nulla perché **non è possibile elevare a potenza nulla lo zero**.

Anche l'uno, nell'elevamento a potenza, produce effetti particolari:

proprietà dell'esponente unitario: $a^1 = a$;
proprietà della base unitaria: $1^b = 1$.

Per la definizione dell'elevamento a potenza, il prodotto di elevamenti a potenza con stessa base produce l'elevamento a potenza della base per la somma degli esponenti:

proprietà prodotto di potenze con stessa base: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;

che, considerando la proprietà dell'esponente nullo, implica la validità della:

proprietà dell'esponente negativo: $a^{-b} = (1/a)^b$.

Sempre per la definizione dell'elevamento a potenza, l'elevamento a potenza di potenza produce l'elevamento a potenza della base per il prodotto degli esponenti:

proprietà elevamento a potenza di potenza: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$;

che, considerando la proprietà di esistenza dell'elemento neutro, implica la validità della:

proprietà dell'esponente frazionario: $a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$;

ovvero implica che, l'estrazione di radice di grado noto può rappresentarsi come caso particolare di elevamento a potenza.

A2.1.6 - Le proprietà distributive

Per come sono definite, moltiplicazione ed elevamento a potenza sono, rispettivamente, le operazioni figlie dell'addizione e della moltiplicazione. Questo legame da origine ad una proprietà detta "proprietà distributiva" poiché, in un'operazione mista in cui l'operazione figlia ha come termine l'operazione genitrice, l'espressione può trasformarsi nell'operazione genitrice avente per termini l'operazione figlia. Fra moltiplicazione ed addizione valgono le seguenti scritture:

proprietà distributiva del prodotto sulla somma (1): $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$;
proprietà distributiva del prodotto sulla somma (2): $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

Fra elevamento a potenza e moltiplicazione vale invece la seguente:

proprietà distributiva della potenza sul prodotto: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

Le stesse proprietà applicate al contrario, ovvero scambiando le posizioni delle due espressioni, diventano dei semplici raccoglimenti.

A3 - Algebra dei vettori

L'algebra è l'insieme delle regole elementari che si utilizzano per manipolare degli oggetti matematici. In questa appendice vedremo l'algebra dei vettori.

A3.1 - I vettori

Iniziamo ad addentrarci nell'argomento partendo dalle definizioni base riguardanti questi oggetti matematici e le loro caratteristiche.

A3.1.1 - Definizione di vettore.

Nel nostro corso identifichiamo come vettore un'entità matematica dotata di:
un **modulo**, ovvero una descrizione quantitativa della sua entità;
una **direzione**, ovvero la retta lungo la quale il vettore geometricamente giace;
un **verso**, ovvero un'orientazione lungo la direzione.

In realtà specifiche proprietà di ciò che noi chiamiamo vettore dipendono esclusivamente dalla natura specifica dell'oggetto matematico a cui ci riferiamo. Dal punto di vista strettamente matematico i vettori sono solo una parte delle grandezze che in Fisica identifichiamo come tali: pur appartenendo tutti alla grande famiglia dei tensori, infatti, i diversi oggetti matematici che noi classifichiamo come vettori, rispondono in maniera diversa ad alcune trasformazioni. Dato che il livello di questo corso non rende necessario affrontare tali trasformazioni, i nostri oggetti risulteranno avere un comportamento omogeneo rispetto alle operazioni che andiamo a considerare di seguito.

A3.1.2 - Modulo e suoi simboli.

Il modulo di un vettore è il valore numerico che definisce la misura della grandezza che il vettore rappresenta. Esso è fondamentale per applicare la matematica alle grandezze vettoriali e, quindi, è importante fissare la simbologia necessaria a rappresentarlo.

Distinguiamo due diverse soluzioni per conoscere il modulo di un vettore: come **valore numerico con segno**, che chiameremo **modulo con segno**, e come **valore assoluto**, che chiameremo **modulo assoluto**.

Come **valore numerico con segno** dobbiamo fissare un verso positivo alla direzione su cui il vettore giace. Se il vettore è equiverso al verso positivo il modulo con segno sarà positivo, in caso contrario sarà negativo. Nel testo rappresenteremo il **modulo con segno** di un vettore con i simboli:

$$|\boldsymbol{a}| = a; \text{(A3.1)}$$

aventi, come ci dice il segno di uguaglianza, il medesimo significato.

Come **valore assoluto** ne risulterà un valore definitivamente positivo. Il **modulo assoluto** di un vettore lo rappresenteremo, nel testo, con i simboli:

$$||\boldsymbol{a}|| = |a|; \text{(A3.2)}$$

aventi anch'essi, come ci dice il segno di uguaglianza, il medesimo significato.

A3.1.3 - Caratteristiche di un vettore.

La natura geometrica dei vettori ci permette di identificare due punti di estrema utilità: il **punto di applicazione** o **coda** o **origine** del vettore, ovvero il punto dal quale il vettore viene tracciato, e la **punta** o **destinazione** del vettore, ovvero il punto in cui il vettore termina.

Punta e coda o, se preferite, origine e destinazione, sono gli estremi del vettore. A distinguerli provvede il verso, rivolto sempre dalla coda alla punta. Dato che il vettore giace su una retta ed ha una dimensione finita, apparirà come un **segmento orientato**.

A3.2 - Le proprietà delle operazioni

Le operazioni che possono essere fatte su di un vettore sono molte, quindi limiteremo il campo dell'analisi ad addizione, sottrazione e moltiplicazione (mista, scalare e vettoriale).

A3.2.1 - Le proprietà dell'addizione

L'operazione base, anche per i vettori, è l'addizione. Sommare due vettori significa metterli in serie, ovvero fare originare il secondo dalla punta del primo. Il risultato è il vettore che origina nell'origine del primo e termina nella punta del secondo, lungo la direzione che collega i due punti.

Anche nell'ambito dei vettori si possono violare l'ordine dei termini nelle singole addizioni o l'ordine delle addizioni nelle serie e, da questo, derivano le due proprietà fondamentali:

proprietà commutativa: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;
proprietà associativa: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

Nell'ambito dei vettori l'equivalente del numero zero è il vettore nullo che verifica la seguente proprietà:

proprietà di esistenza dell'elemento neutro: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$;

dalla quale consegue che per ogni vettore non nullo possiamo definire l'inverso rispetto all'addizione:

proprietà di esistenza dell'elemento inverso: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

L'inverso di un vettore rispetto all'addizione si dice **opposto** del vettore considerato.

Notiamo che la proprietà di esistenza dell'elemento inverso ci permette di interpretare la differenza come somma fra il sottraendo e l'opposto del sottrattore:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b});$$

da cui nasce la possibilità di considerare la differenza come un caso particolare di somma.

A3.2.2 - Le proprietà della sottrazione

La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.

Anche nel campo dei vettori non si possono violare l'ordine dei termini nelle singole sottrazioni o l'ordine delle sottrazioni in una serie e ne deriva la proprietà fondamentale:

proprietà anticommutativa: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.
proprietà invariantiva: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

Anche nella differenza, il vettore nullo produce effetti particolari. Vale la seguente proprietà:

proprietà del sottrattore nullo: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$.

Notiamo che anche la differenza fra vettori perde le proprietà che permettono di violare l'ordine delle operazioni. Risulta quindi conveniente considerare la sottrazione come un caso particolare di addizione.

A3.2.3 - Le proprietà della moltiplicazione mista

La moltiplicazione mista non è altro che un modo sintetico per scrivere una serie di addizioni fra vettori uguali. Vale, infatti, la relazione:

$$\boldsymbol{a} \cdot b = \underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\ldots+\boldsymbol{a}}_{b\ termini} \quad ;(A3.3)$$

I termini della moltiplicazione mista sono il vettore **moltiplicando** e lo scalare **moltiplicatore**, il suo risultato è il vettore **prodotto**. Il fatto che i termini abbiano nomi diversi è una chiara indicazione della differenza del loro ruolo ma, grazie alla differente natura matematica dei due termini, si può comunque violare l'ordine dei termini nelle singole moltiplicazioni senza rischiare di creare confusione; vale quindi la fondamentale:

proprietà commutativa: $\boldsymbol{a} \cdot b = b \cdot \boldsymbol{a}$;

Lo zero, come sempre, produce effetti particolari. Nella moltiplicazione mista lo zero ha un peso enorme e rende sempre il risultato un vettore nullo. Ne scaturisce la seguente proprietà:

proprietà del moltiplicatore nullo: $\boldsymbol{a} \cdot 0 = \boldsymbol{0}$.

Allo stesso modo, anche il vettore nullo produce effetti particolari. Nella moltiplicazione mista ha un peso enorme poiché è sempre pari al risultato. Ne scaturisce la seguente proprietà:

proprietà del moltiplicando nullo: $\boldsymbol{0} \cdot b = \boldsymbol{0}$.

Anche nella moltiplicazione mista l'uno ha un ruolo particolare:

proprietà del moltiplicatore unitario: $\boldsymbol{a} \cdot 1 = \boldsymbol{a}$.

A3.2.4 - Le proprietà della moltiplicazione scalare

La moltiplicazione scalare è una moltiplicazione fra vettori che restituisce un numero. Vale la relazione:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = c. \quad (A3.4)$$

I termini della moltiplicazione scalare sono i vettori **moltiplicando** e **moltiplicatore** e il suo risultato è lo scalare **prodotto scalare**. Il fatto che i termini abbiano nomi diversi è una chiara indicazione della differenza del loro ruolo ma, grazie alla natura matematica della definizione, si può comunque violare l'ordine dei termini nelle singole moltiplicazioni; vale quindi la:

proprietà commutativa: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$;

Il vettore nullo, come sempre, produce effetti particolari. Nella moltiplicazione scalare il vettore nullo ha un peso enorme e rende sempre il risultato nullo. Ne scaturisce la proprietà:

proprietà di esistenza dell'elemento annullante: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{0} = 0$.

Allo stesso modo, anche la geometria dei vettori produce effetti particolari. Nella moltiplicazione scalare valgono le seguenti proprietà:

proprietà di perpendicolarità dei vettori: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0,\ \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$;
proprietà di parallelismo dei vettori: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a \cdot b,\ \boldsymbol{a}\ //\ \boldsymbol{b}$;

e la regola generale che definisce il prodotto scalare:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a \cdot b_{//} = a_{//} \cdot b = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cdot cos\theta; \text{ (A3.5)}$$

nella quale con $a_{//}$ e $b_{//}$ abbiamo indicato i moduli con segno dei componenti dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ paralleli, rispettivamente, a $\boldsymbol{b}$ ed ad $\boldsymbol{a}$, e con $cos\theta$, la funzione trigonometrica che trasforma il prodotto dei valori assoluti nel risultato corretto conoscendo l'angolo θ formato dalle direzioni dei due vettori.

A3.2.5 - Le proprietà della moltiplicazione vettoriale

La moltiplicazione vettoriale è una moltiplicazione fra vettori che restituisce un vettore. Vale la relazione:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}. \text{ (A3.6)}$$

I termini della moltiplicazione vettoriale sono i vettori **moltiplicando** e **moltiplicatore** e il suo risultato è il vettore **prodotto vettoriale**, sempre perpendicolare al piano su cui giacciono i termini della moltiplicazione nel verso definito dalla "*regola della mano destra*": tenendo la mano destra aperta e piatta, disponendo il pollice in direzione e verso del moltiplicando e l'indice in direzione e verso del moltiplicatore, il risultato è uscente perpendicolarmente dal palmo della mano.

Il fatto che i termini abbiano nomi diversi è una chiara indicazione della differenza del loro ruolo e, a causa della natura matematica della definizione, violando l'ordine dei termini nelle singole moltiplicazioni vale la:

proprietà anticommutativa: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a})$;

Il vettore nullo, come sempre, produce effetti particolari. Nella moltiplicazione vettoriale il vettore nullo ha un peso enorme e rende sempre il risultato pari a se stesso:

proprietà di esistenza dell'elemento assorbente: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

Allo stesso modo, anche la geometria dei vettori produce effetti particolari. Nella moltiplicazione vettoriale valgono le seguenti proprietà:

proprietà di parallelismo dei vettori: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}\ //\ \boldsymbol{b}$;
proprietà di perpendicolarità dei vettori: $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = a \cdot b,\ \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$;

e la regola generale che definisce il prodotto vettoriale:

$$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = a\cdot b_{\perp} = a_{\perp}\cdot b = a\cdot b\cdot sen\theta; \text{ (A3.7)}$$

nella quale con $a_{\perp}$ e $b_{\perp}$ abbiamo indicato i moduli con segno dei componenti dei vettori ***a*** e ***b*** perpendicolari, rispettivamente, a ***b*** ed ***a***, e con $sen\theta$, la funzione trigonometrica che trasforma il prodotto dei valori assoluti nel risultato corretto conoscendo l'angolo θ formato dalle direzioni dei due vettori.

A3.2.6 - Le moltiplicazioni con termini vettoriali.

Gli elementi inversi non possono esistere nelle moltiplicazioni che coinvolgono fattori vettoriali, sia per la disomogeneità fra termini e fra termini e risultato, sia per la dipendenza del risultato dalla geometria dei termini. Questo implicherebbe l'impossibilità di esprimere una divisione come prodotto ma la cosa è molto più complessa poiché **non è definibile una divisione per un vettore**, nemmeno come operazione inversa della moltiplicazione.

Esistono, però, situazioni particolari in cui **la moltiplicazione con vettori può essere invertita** e sono tutte le situazioni in cui **possiamo trasformare la moltiplicazione con vettori in una moltiplicazione fra numeri**, essendo quest'ultima lecitamente invertibile.

Sarà quindi invertibile la moltiplicazione mista, dato che, avendo il vettore moltiplicando ed il vettore prodotto la stessa direzione, quando passiamo dai vettori ai moduli con segno.

Il prodotto scalare, invece, sarà invertibile solo se i termini sono paralleli fra loro, oppure per determinare il modulo con segno del componente dell'uno parallelo all'altro.

Similmente si potrà invertire il prodotto vettoriale solo se i termini sono perpendicolari fra loro, oppure per determinare il modulo con segno del componente dell'uno perpendicolare all'altro.

A3.2.7 - Cenni sull'elevamento a potenza del vettore.

Iniziamo dall'elevamento al quadrato, che non è altro che un modo sintetico per scrivere una moltiplicazione scalare fra due vettori uguali. Vale, quindi, la relazione:

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = a\cdot a = a^2; \text{ (A3.8.1)}$$

per la quale il quadrato di un vettore coincide con il quadrato del suo modulo con segno.

Considerando, ora, l'elevamento al cubo, ci accorgiamo che è sì un modo sintetico per scrivere una moltiplicazione fra tre vettori uguali, ma non potranno essere tutti prodotti scalari.

Varrà, quindi, la relazione:

$$\boldsymbol{a}^3 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a{\cdot}a \cdot \boldsymbol{a} = a^2 \cdot \boldsymbol{a}; \text{ (A3.8.2)}$$

per la quale il cubo di un vettore è un vettore con stessa geometria ma modulo elevato al cubo.

Se ora considerando l'elevamento alla quarta potenza, ci accorgiamo che si deve aggiungere un'ulteriore moltiplicazione fra vettori, quindi un'altra moltiplicazione scalare. Varrà, quindi, la relazione:

$$\boldsymbol{a}^4 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = a^2 \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^3 \times \boldsymbol{a} = a^3 \cdot a = a^4; \text{ (A3.8.3)}$$

per la quale la quarta potenza di un vettore è uno scalare pari al modulo del vettore elevato alla quarta.

Possiamo, quindi, dire che le potenze pari di un vettore sono scalari pari alla medesima potenza del modulo, mentre le potenze dispari sono vettori con la stessa geometria del vettore di partenza e modulo elevato alla medesima potenza.

A3.2.8 - Le proprietà distributive

Per come sono definite, la moltiplicazione mista è l'operazione figlia dell'addizione fra vettori. Questo legame da origine ad una proprietà detta "*proprietà distributiva*" poiché, in un'operazione mista in cui l'operazione figlia ha come uno dei termini il risultato dell'operazione genitrice, l'espressione può trasformarsi nell'operazione genitrice avente per termini i risultati dell'operazione figlia. Fra ogni tipo di moltiplicazione con vettori e l'addizione fra vettori vale la proprietà distributiva:

proprietà distributiva del prodotto misto sulla somma di vettori:

$$a{\cdot}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = a{\cdot}\boldsymbol{b} + a{\cdot}\boldsymbol{c}; \text{ (A3.9)}$$

proprietà distributiva del prodotto scalare sulla somma di vettori:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}; \text{ (A3.10)}$$

proprietà distributiva del prodotto vettoriale sulla somma di vettori:

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}. \text{ (A3.11)}$$

Le stesse proprietà applicate al contrario, ovvero scambiando le posizioni delle due espressioni, diventano dei semplici raccoglimenti.

A4 - I vettori e i loro componenti.

L'algebra dei vettori è piuttosto complessa e la loro geometria ne è la principale causa. Un modo semplice per descriverne la geometria semplificandone l'algebra è l'uso della descrizione per componenti.

A4.1 - I componenti di un vettore.

Si dicono componenti di un vettore un gruppo minimo di vettori, giacenti lungo direzioni note e diverse, in grado, sommati, di dare il vettore di cui sono componenti. Con gruppo minimo si intende due vettori per descrivere vettori giacenti su di un piano e tre per descrivere vettori nello spazio. I componenti di un vettore sono, quindi, una scomposizione del vettore lungo direzioni note.

A4.1.1 - La scomposizione ortogonale.

Per descrivere un vettore in componenti bisogna, dunque, definire le direzioni lungo le quali operare la scomposizione. La soluzione più semplice e, normalmente, più efficace è quella di considerare una direzione che sia caratteristica del problema e le altre in modo che risultino tutte ortogonali a coppie.

L'ortogonalità è importante: vettori giacenti lungo direzioni perpendicolari sono indipendenti fra loro poiché nessuno di loro ha un componente non nullo lungo le altre direzioni.

A4.2 – Operare con vettori scomposti ortogonalmente.

La scomposizione ortogonale di un vettore permette di affrontare facilmente le diverse operazioni. Vediamo come.

A4.2.1 - La somma.

La somma di vettori scomposti ortogonalmente nelle medesime direzioni produce un vettore i cui componenti sono la somma dei corrispondenti componenti degli addendi. Infatti:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)+(\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{b}_y+\boldsymbol{b}_z) = (\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_z+\boldsymbol{b}_z). \quad \text{(A4.1)}$$

A4.2.2 – Il prodotto misto.

Il prodotto misto di un vettore scomposto ortogonalmente produce un vettore i cui componenti sono il prodotto misto dei componenti del vettore per lo scalare. Infatti, per la (A3.9):

$$\boldsymbol{a}\cdot b = (\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)\cdot b = \boldsymbol{a}_x\cdot b+\boldsymbol{a}_y\cdot b+\boldsymbol{a}_z\cdot b. \quad \text{(A4.2)}$$

A4.2.3 – Il prodotto scalare.

Il prodotto scalare di vettori scomposti ortogonalmente nelle medesime direzioni produce la somma dei prodotti dei moduli con segno dei corrispondenti componenti degli addendi. Infatti, per la (A3.10):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)\times(\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{b}_y+\boldsymbol{b}_z) = \\ &= (\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{b}_z)+(\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{b}_z)+(\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{b}_z) = \\ &= (\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{b}_x)+0+0+0+(\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{b}_y)+0+0+0+(\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{b}_z) = (\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{b}_z); \quad \text{(A4.3.1)}\end{aligned}$$

che, utilizzando per i componenti la notazione del modulo con segno la (A4.3.1) diventa:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z. \quad \text{(A4.3.2)}$$

A4.2.3 – Il prodotto vettoriale.

Il prodotto vettoriale di vettori scomposti ortogonalmente nelle medesime direzioni produce il seguente vettore:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)\wedge(\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{b}_y+\boldsymbol{b}_z) = \\ &= (\boldsymbol{a}_x\wedge\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_x\wedge\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_x\wedge\boldsymbol{b}_z)+(\boldsymbol{a}_y\wedge\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_y\wedge\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_y\wedge\boldsymbol{b}_z)+(\boldsymbol{a}_z\wedge\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_z\wedge\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_z\wedge\boldsymbol{b}_z) = \\ &= 0+(\boldsymbol{a}_x\wedge\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_x\wedge\boldsymbol{b}_z)+(\boldsymbol{a}_y\wedge\boldsymbol{b}_x)+0+(\boldsymbol{a}_y\wedge\boldsymbol{b}_z)+(\boldsymbol{a}_z\wedge\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_z\wedge\boldsymbol{b}_y)+0 = \\ &= (\boldsymbol{a}_y\wedge\boldsymbol{b}_z+\boldsymbol{a}_z\wedge\boldsymbol{b}_y)+(\boldsymbol{a}_x\wedge\boldsymbol{b}_z+\boldsymbol{a}_z\wedge\boldsymbol{b}_x)+(\boldsymbol{a}_x\wedge\boldsymbol{b}_y+\boldsymbol{a}_y\wedge\boldsymbol{b}_x); \quad \text{(A4.4.1)}\end{aligned}$$

che sono, rispettivamente, i componenti nelle direzioni x, y e z del prodotto. Utilizzando per i componenti la notazione del modulo con segno la (A4.3.1) diventa:

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = (a_y\cdot b_z - a_z\cdot b_y)+(a_z\cdot b_x - a_x\cdot b_z)+(a_x\cdot b_y - a_y\cdot b_x). \quad \text{(A4.4.2)}$$

A5 - L'alfabeto greco.

In Fisica si devono rappresentare parecchie grandezze. Nonostante il nostro alfabeto sia costituito di venticinque lettere, che diventano cinquanta considerando la differenza fra maiuscole e minuscole, queste non sono sufficienti (anche perché si desidera assegnare lettere che abbiano senso rispetto alla grandezza rappresentata; ad esempio F per le forze, E per le energie, L per il lavoro...).

Allo scopo di aumentare i simboli utilizzabili si impiegano spesso i caratteri dell'alfabeto greco. La tabella che segue li raccoglie tutti.

Nome	Maiuscola	Minuscola
Alfa	Α	α
Beta	Β	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	Ε	ε
Zeta	Ζ	ζ
Eta	Η	η
Theta	Θ	θ
Iota	Ι	ι
Kappa	Κ	κ
Lambda	Λ	λ
Mu	Μ	μ
Nu	Ν	ν
Xi	Ξ	ξ
Omicron	Ο	ο
Pi	Π	π
Rho	Ρ	ρ
Sigma	Σ	σ
Tao	Τ	τ
Ipsilon	Υ	υ
Fi	Φ	φ
Chi	Χ	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

A6 - Multipli e sottomultipli.

Multipli e sottomultipli sono un necessario complemento all'unità di misura. Nella tabella seguente vediamo i più utilizzati.

A6.1 - I prefissi del Sistema Internazionale.

Multipli		**Sottomultipli**	
Nome (simbolo)	**Ordine di grandezza**	**Nome (simbolo)**	**Ordine di grandezza**
Deca (da)	10^1 = 10	Deci (d)	10^{-1} = 0,1
Etto (h)	10^2 = 100	Centi (c)	10^{-2} = 0,01
Chilo (k)	10^3 = 1.000	Milli (m)	10^{-3} = 0,001
Mega (M)	10^6 = 1.000.000	Micro (μ)	10^{-6} = 0,000.001
Giga (G)	10^9 = 1.000.000.000	Nano (n)	10^{-9} = 0,000.000.001
Tera (T)	10^{12} = 1.000.000.000.000	Pico (p)	10^{-12} = 0,000.000.000.001
Peta (P)	10^{15} = 1.000.000.000.000.000	Femto (f)	10^{-15} = 0,000.000.000.000.001
Exa (E)	10^{18} = 1.000.000.000.000.000.000	Atto (a)	10^{-18} = 0,000.000.000.000.000.001

A6.2 - L'uso dei prefissi.

Vediamo alcuni esempi di uso dei prefissi. Consideriamo, ad esempio, la velocità della luce nel vuoto:

$$c = 300.000.000\ m/s; \quad \text{(A6.1.1)}$$

ovvero, in potenze di dieci:

$$c = 3 \cdot 10^8\ m/s. \quad \text{(A6.1.2)}$$

I multipli più vicino all'ottava potenza di dieci sono il mega ed il giga; quindi potremo scrivere:

$$c = 300\ M\ m/s; \quad \text{(A6.2.1)}$$

oppure:

$$c = 0{,}3\ G\ m/s. \quad \text{(A6.2.2)}$$

Consideriamo ora un puntatore laser con emissione nel rosso; la lunghezza d'onda emessa sarà circa:

$$l = 0{,}000.000.65\ m; \quad \text{(A6.3.1)}$$

ovvero, in potenze di dieci:

$$l = 65 \cdot 10^{-8}\ m. \quad \text{(A6.3.2)}$$

I sottomultipli più vicini alla potenza meno otto di dieci sono il micro ed il nano; quindi potremo scrivere:

$$l = 0{,}65\ \mu m; \quad \text{(A6.4.1)}$$

oppure:

$$l = 650\ nm. \quad \text{(A6.4.2)}$$

In generale sono da preferire le scritture con parte numerica minore di mille e, possibilmente, intera, quindi le (A6.2.1) e (A6.4.2).

Notiamo che, ovviamente, più piccolo è il multiplo o il sottomultiplo utilizzato, più grande è la parte numerica e viceversa. Notiamo anche che, ad eccezione di particolari contesti, i prefissi multipli deca ed etto, come i prefissi sottomultipli deci e centi, sono poco utilizzati. Ad esempio, la seguente forza:

$$F = 0{,}14\ N; \quad \text{(A6.5.1)}$$

è rappresentabile come:

$$F = 1{,}4\ dN; \quad \text{(A6.5.2)}$$

o come:

$$F = 14\ cN; \quad \text{(A6.5.3)}$$

oppure come:

$$F = 140\ mN; \quad \text{(A6.5.4)}$$

tutte corrette, fra le quali vanno preferite le (A6.5.3) e (A6.5.4). Anche se la forma (A6.5.3) risponde perfettamente a tutte le caratteristiche già individuate risultando, quindi, una scrittura ineccepibile, la forma (A6.5.4) sarà più facilmente utilizzata.

Ottava revisione: 10/2013