Misura degli archi e degli angoli

1. Si definisce come **positivo** il verso antiorario di percorrenza di una circonferenza; come **negativo** il verso orario.

2. Fissato su una circonferenza un punto *A* come **origine** e un punto *B* come **estremo** di un arco, il punto *B* è estremo di due gruppi infiniti di archi: tutti gli archi **positivi** descritti muovendosi sulla circonferenza dal punto *A* nel verso positivo o arrivando direttamente in *B* o dopo aver descritto una o più circonferenze; e tutti gli archi **negativi** descritti muovendosi sulla circonferenza dal punto *A* nel verso negativo o arrivando direttamente in *B* o dopo aver descritto una o più circonferenze.

3. A ciascun arco *AB* corrisponde un **angolo al centro** *AOB*, che può pensarsi descritto dalla rotazione del raggio *OA* intorno al centro *O* della circonferenza, nel verso positivo o in quello negativo.

4. Si dice **ampiezza** di un arco l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.

5. Nel **sistema sessagesimale** si prende come unità di misura dell'ampiezza degli angoli e degli archi associati la 360ª parte dell'angolo giro, che si chiama **grado**. Il grado (°) si suddivide in 60 primi (') e il primo in 60 secondi ("). Si passa dalla misura di un arco α in gradi alla lunghezza l dell'arco associato di raggio r tramite la formula $\alpha = \frac{180° l}{\pi r}$.

6. Si definisce il **radiante** come l'arco che, rettificato, è uguale al raggio della circonferenza a cui appartiene. Si passa dalla misura di un arco ρ alla lunghezza l dell'arco associato di raggio r tramite la formula $\rho = \frac{l}{r}$. La misura in radianti di un arco si dice **misura circolare** dell'arco.

7. Date in un piano due semirette *a* e *b* di origine *O*, si dice **angolo** di vertice *O* e di lati *a* e *b* ciascuna delle due parti del piano delimitate dalle due semirette. L'angolo di lati *a* e *b* si può pensare generato dalla rotazione intorno al centro *O* della semiretta *a* (o di un suo segmento *OA*), detta **primo lato** dell'angolo, fino a sovrapporsi all'altra semiretta (o a un suo segmento *OB*), detta **secondo lato** dell'angolo. L'angolo si assume positivo o negativo a seconda che la rotazione avvenga in verso positivo o negativo.

8. La parte del piano compresa tra le due semirette *a* e *b* uscenti da *O* individua tutti gli infiniti angoli ottenuti dalla rotazione della semiretta *a* intorno al vertice *O* fino a sovrapporsi alla semiretta *b* o direttamente o dopo aver percorso una o più volte l'intero angolo giro.

9. Ci si riferisce indifferentemente alla misura dell'ampiezza di un arco o alla misura del angolo ad esso associato.

Funzioni goniometriche

1. Dato un sistema di assi cartesiano ortogonale, si dice **circonferenza goniometrica** la circonferenza avente il centro nell'origine degli assi e il raggio uguale all'unità di misura.

2. Ad ogni angolo α = *AOB* possiamo sempre associare una circonferenza goniometrica di centro *O* e di cui α è un angolo al centro, corrispondente ad un arco *AB* con origine *A* sull'asse delle ascisse.

3. Si definisce **seno** (sen) di un angolo l'ordinata dell'estremo dell'arco corrispondente nella circonferenza goniometrica.

4. Si definisce **coseno** (cos) di un angolo l'ascissa dell'estremo dell'arco corrispondente nella circonferenza goniometrica.

5. Le curve dei grafici corrispondenti alle funzioni seno e coseno si chiamano rispettivamente **sinusoide** e **cosinusoide**.

6. Il seno e il coseno sono funzioni periodiche con periodo 2π.

7. Si definisce **tangente** (tg) di un angolo l'ordinata dell'intersezione della tangente geometrica condotta nell'origine dell'arco corrispondente nella circonferenza goniometrica, con il raggio passante per l'estremo dell'arco.

8. Le curva del grafico corrispondente alla funzione tangente si chiama **tangentoide**.

9. La tangente è una funzione periodica con periodo π.

10. Per un qualsiasi angolo α si ha $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. Queste relazioni sono dette **prima e seconda relazione fondamentale della goniometria**.

11. Si definisce **cotangente** (cotg) di un angolo l'ascissa dell'intersezione della tangente geometrica condotta alla circonferenza goniometrica per la sua intersezione con l'asse delle ordinate, con il raggio passante per l'estremo dell'arco. Si ha $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. La cotangente è una funzione periodica con periodo π e la curva del suo grafico si chiama **cotangentoide**.

12. Si definiscono anche la **secante** (sec) di un angolo come il reciproco del coseno dello stesso angolo $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; e la **cosecante** (cosec) come il reciproco del seno: $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

13. Si chiamano rispettivamente **arcoseno** (arcsen), **arcocoseno** (arccos), **arcotangente** (arctg), **arcocotangente** (arccotg**)** le funzioni inverse delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente.

14. Valgono le seguenti relazioni:

	noto sen α	noto cos α	noto tg α
trovare sen α		$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\operatorname{sen}\alpha = \pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
trovare cos α	$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$		$\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
trovare tg α	$\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	

15. Si chiamano **funzioni sinusoidali** le funzioni di equazioni $y = \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$ e $y = \cos(\omega x + \varphi)$, con A, ω, $\varphi \in R$. il numero $|A|$ si dice **ampiezza** della funzione sinusoidale, il numero ω si dice **pulsazione** della funzione sinusoidale, il numero φ si dice **sfasamento** o **fase iniziale** della funzione sinusoidale. Il **periodo** della funzione sinusoidale è $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Archi associati e complementari

1. Dato un arco AB di ampiezza α, gli archi $AB' = \pi - \alpha$, $AB'' = \pi + \alpha$, $AB''' = 2\pi - \alpha$ hanno uguali, in valore assoluto, ciascuna funzione goniometrica. Essi vengono perciò detti **archi associati**.

2. **Archi che differiscono di un numero intero di circonferenze**: gli archi α e $\alpha + 2k\pi$ hanno le stesse funzioni goniometriche: $\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\ \alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$, $\text{tg}(\alpha + 2k\pi) = \text{tg}\ \alpha$, $\text{cotg}(\alpha + 2k\pi) = \text{cotg}\ \alpha$.

3. **Archi supplementari**: si dicono supplementari archi la cui somma, a meno di interi giri, è π radianti. Due archi supplementari hanno lo stesso seno, mentre coseno, tangente e cotangente sono uguali in valore assoluto, ma di segno contrario: $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$, $\text{cotg}(\pi - \alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$.

4. **Archi che differiscono di π a meno di un numero intero di circonferenze**. Due archi che differiscono di π a meno di un numero intero di circonferenze hanno la stessa tangente e cotangente, e seno e coseno uguali in valore assoluto, ma di segno contrario: $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$, $\text{cotg}(\pi + \alpha) = \text{cotg}\ \alpha$.

5. **Archi esplementari**: si dicono esplementari archi la cui somma, a meno di interi giri, è 2π radianti. Due archi esplementari hanno lo stesso coseno, mentre seno, tangente e cotangente sono uguali in valore assoluto, ma di segno contrario: $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$, $\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$, $\text{cotg}(2\pi - \alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$.

6. **Archi opposti**: si dicono opposti archi di uguale ampiezza, ma di segno contrario. Valgono le stesse relazioni degli archi esplementari: $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha$, $\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$.

7. **Archi complementari**: si dicono complementari archi la cui somma, a meno di interi giri, è $\pi/2$ radianti. Se due archi sono complementari, il seno e la tangente dell'uno sono rispettivamente il coseno e la cotangente dell'altro: $\text{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\pi/2 - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$, $\text{tg}(\pi/2 - \alpha) = \text{cotg}\ \alpha$, $\text{cotg}(\pi/2 - \alpha) = \text{tg}\ \alpha$.

8. **Archi che differiscono di $\pi/2$ a meno di un numero intero di circonferenze**. Per due archi che differiscono di $\pi/2$ a meno di un numero intero di circonferenze valgono le relazioni: $\text{sen}(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$, $\text{tg}(\pi/2 + \alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$, $\text{cotg}(\pi/2 + \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$.

9. **Archi che differiscono di 3/2 π a meno di un numero intero di circonferenze**. Per due archi che differiscono di 3/2 π a meno di un numero intero di circonferenze valgono le relazioni: $\text{sen}(3\pi/2 + \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(3\pi/2 + \alpha) = \text{sen}\ \alpha$, $\text{tg}(3\pi/2 + \alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$, $\text{cotg}(3\pi/2 + \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$.

10. **Ridurre un arco al primo quadrante** significa trovare l'arco positivo, compreso tra 0 e $\pi/2$, le cui funzioni goniometriche sono uguali, in valore assoluto, a quelle dell'arco dato.

Archi particolari ed equazioni elementari

1. Valori delle funzioni goniometriche di archi particolari:

α	sen α	cos α	tg α	cotg α
0	0	1	0	$\pm\infty$
$\pi/10$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0

2. Si chiamano **equazioni goniometriche** le equazioni tra una o più funzioni circolari di archi o di angoli incogniti.

3. Le equazioni goniometriche del tipo sen $x = m$, cos $x = n$, tg $x = p$, si dicono **equazioni goniometriche elementari**.

4. L'equazione sen $x = m$ con $-1 \leq m \leq 1$ ha soluzione $x = \alpha + 2k\pi \vee \pi - \alpha + 2k\pi$, dove α è l'ampiezza in radianti dell'arco appartenente al quarto o al primo quadrante che verifica l'equazione e k è un intero qualsiasi.

5. Affinché due archi abbiano lo stesso seno è necessario e sufficiente che differiscano di un numero intero di circonferenze, ovvero che uno di essi differisca per un numero intero di circonferenze dal supplementare dell'altro: sen α = sen $\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi \vee \alpha = \pi - \beta + 2k\pi$.

6. L'equazione cos $x = n$ con $-1 \leq n \leq 1$ ha soluzione $x = \pm\alpha + 2k\pi$, dove α è l'ampiezza in radianti dell'angolo appartenente al primo o al secondo quadrante che verifica l'equazione e k è un intero qualsiasi.

7. Affinché due archi abbiano lo stesso coseno è necessario e sufficiente che differiscano di un numero intero di circonferenze, ovvero che uno di essi differisca per un numero intero di circonferenze dall'opposto dell'altro: cos α = cos $\beta \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$.

8. L'equazione tg $x = p$ ha soluzione $x = \alpha + k\pi$, dove α è l'ampiezza in radianti dell'angolo appartenente al quarto o al primo quadrante che verifica l'equazione e k è un intero qualsiasi.

9. Affinché due archi abbiano la stessa tangente è necessario e sufficiente che differiscano di un numero intero di semicirconferenze e siano entrambi diversi da $\pi/2 + k\pi$: tg α = tg $\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$, $\alpha, \beta \neq \pi/2 + k\pi$.

10. Le condizioni indicate per la tangente valgono anche per la cotangente.

Formule goniometriche

1. **Formule di addizione e sottrazione**:

   a) $\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

   b) $\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

   c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

   d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

   e) $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$

   f) $\text{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$

2. **Formule di duplicazione**:

   a) $\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

   b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

   c) $\text{tg}2\alpha = \dfrac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$

3. **Formule parametriche**:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

4. **Formule di bisezione**:

a) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

b) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

5. **Formule di prostaferesi**:

a) $\operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

b) $\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$

c) $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

d) $\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$

e) $\operatorname{tg}p \pm \operatorname{tg}q = \dfrac{\operatorname{sen}(p\pm q)}{\cos p\cos q}$

6. **Formule di Werner**:

a) $\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

b) $\cos\alpha\ \cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

c) $\operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$

7. Una combinazione lineare $y = a$ sen $\omega x + b$ cos ωx di funzioni sinusoidali dello stesso angolo è una funzione sinusoidale: $y = a\,\mathrm{sen}\,\omega x + b\cos\omega x = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi)$, dove $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\mathrm{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Identità, equazioni e disequazioni goniometriche

1. Si dice **identità goniometrica** l'uguaglianza fra due espressioni contenenti funzioni goniometriche di uno o più archi, verificata per qualunque valore di quello o quegli archi, con esclusione, al più, di quei valori per i quali l'uguaglianza perde significato.

2. Un'identità goniometrica si verifica eseguendo in uno dei due membri, o in entrambi, successive trasformazioni in modo da farli diventare uguali.

3. Una equazione si dice **goniometrica** se contiene funzioni goniometriche nei cui argomenti figura l'incognita.

4. Il metodo generale per risolvere un'equazione goniometrica in cui gli argomenti delle diverse funzioni siano tutti uguali tra loro consiste nell'esprimere tutte le funzioni goniometriche mediante una sola e nel prendere questa funzione come incognita ausiliaria; ci si riduce quindi alla risoluzione di un'equazione goniometrica elementare.

5. Quando l'equazione, ridotta e con il secondo membro uguale a zero, è decomponibile in fattori, la si scompone e si eguaglia a zero ciascun fattore.

6. Se gli argomenti delle funzioni goniometriche presenti nell'equazione non sono tutti uguali si cercherà per prima cosa di renderli uguali applicando opportunamente le formule goniometriche.

7. L'equazione del tipo a sen $x + b$ cos $x = c$ in cui figurano solo il seno e il coseno di un arco incognito e tali funzioni sono di primo grado, si dice **equazione lineare in seno e coseno**:

   a) per $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, l'equazione diventa a sen $x + b$ cos $x = 0$ (**equazione omogenea di 1° grado**) che ha soluzione $x = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{b}{a}\right) + k\pi$;

   b) per a, b, c diversi da zero:

      - si possono esprimere sen x e cos x in funzione di $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ (**metodo delle formule parametriche**) e si ricava la soluzione; nel caso particolare in cui è $b = c$ si devono aggiungere le soluzioni $x = (2k + 1)\pi$;

      - si può introdurre l'angolo ausiliare φ tale che $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\mathrm{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, riducendo l'equazione a $\mathrm{sen}(x + \varphi) = -\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (**metodo dell'angolo aggiunto**).

8. L'equazione del tipo $a\,\mathrm{sen}^2 x + b$ sen x cos $x + c\cos^2 x = 0$ si dice **equazione omogenea di 2° grado**. Dividendo per $\cos^2 x$ si ottiene un'equazione di 2° grado in tg x. Se $a = 0$ si devono aggiungere le soluzioni $x = \pi/2 + k\pi$.

9. L'equazione del tipo $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = d$ si può rendere omogenea osservando che $d = d(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)$. Si può anche trasformare in un'equazione lineare osservando che è $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$.

10. Le equazioni simmetriche rispetto a sen x e cos$x$, come nei casi $a(\operatorname{sen} x + \cos x) + b \operatorname{sen} x \cos x = c$, $a(\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x) = b$, ecc., si possono risolvere ponendo $x = \pi/4 + z$; si ottengono equazioni di 2° grado in cos z.

11. Per le **disequazioni goniometriche** valgono gli stessi principi indicati per le disequazioni algebriche; occorre però tener presente il dominio, il codominio e la periodicità delle singole funzioni goniometriche.

12. Le **equazioni goniometriche trascendenti** sono quelle in cui l'anglo incognito compare sia esplicitamente sia come argomento di una o più funzioni goniometriche. In generale possono essere risolte solo con metodi grafici o approssimati.

Trigonometria

1. Si dicono **elementi di un triangolo** i tre lati e i tre angoli.

2. Scopo della trigonometria è quello di stabilire le relazioni metriche fra gli elementi di un triangolo, che permettano di calcolare le misure degli elementi incogniti di un triangolo di cui siano dati tre elementi, fra i quali almeno un lato.

3. Nel seguito indicheremo con A, B, C i vertici di un triangolo, con a, b, c le misure dei lati rispettivamente opposti e con α, β, γ le ampiezza degli angoli con vertici in A, B, C. Se il triangolo è rettangolo indicheremo con A il vertice dell'angolo retto, e con a l'ipotenusa.

4. Valgono le seguenti proprietà fra gli elementi di un triangolo qualunque:

   a) la relazione fondamentale tra gli angoli di un triangolo: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$;

   b) la relazione fra i lati: in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza;

   c) in un triangolo la stessa relazione, di uguaglianza o disuguaglianza, che intercorre fra due lati, intercorre pure fra gli angoli rispettivamente opposti.

5. In un **triangolo rettangolo** il seno di un angolo acuto è uguale al rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa, il coseno al rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa, la tangente è uguale al rapporto tra il cateto opposto e il cateto adiacente. Si ha quindi:

   a) $\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a}$

   b) $\cos \beta = \frac{c}{a}$

   c) $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$

   d) $\operatorname{sen} \gamma = \frac{c}{a}$

   e) $\cos \beta = \frac{b}{a}$

   f) $\operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b}$

6. Poiché in un triangolo rettangolo β e γ sono complementari, si ha sen γ = cos β, sen β = cos γ, tg γ = cotg β, tg β = cotg γ.

7. **Teoremi fondamentali sul triangolo rettangolo**:

   a) in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso: $b = a \operatorname{sen} \beta$; $c = a \operatorname{sen} \gamma$,

b) in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente: $b = a \cos \gamma$, $c = a \cos \beta$;

c) in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto: $b = c \operatorname{tg} \beta$; $c = b \operatorname{tg} \gamma$;

d) in un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo acuto ad esso adiacente: $b = c \operatorname{cotg} \gamma$, $c = b \operatorname{cotg} \beta$;

e) in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è uguale al rapporto fra un cateto e il seno dell'angolo opposto a questo cateto, oppure al rapporto fra un cateto e il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente: $a = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\cos\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\cos\gamma}$.

8. **Risoluzione dei triangoli rettangoli**:

a) dati i cateti b e c, calcolare a, β e γ. $\beta = \operatorname{arctg}\frac{b}{c}$, $\gamma = \pi/2 - \beta$, $a = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ o $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; il problema ammette sempre una soluzione;

b) dati l'ipotenusa a e il cateto b, calcolare c, β e γ. $\beta = \operatorname{arcsen}\frac{b}{a}$, $\gamma = \pi/2 - \beta$, $c = a \operatorname{sen} \gamma$ o $c = b \operatorname{tg} \gamma$ o $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; il problema ammette sempre una soluzione se $a > b$;

c) dati il cateto b e l'angolo acuto β, calcolare a, c e γ. $\gamma = \pi/2 - \beta$, $a = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$, $c = b \operatorname{cotg} \beta$; il problema ammette sempre una soluzione;

d) dati l'ipotenusa a e l'angolo acuto β, calcolare b, c e γ. $\gamma = \pi/2 - \beta$, $b = a \operatorname{sen} \beta$, $c = a \operatorname{sen} \gamma = a \cos \beta$; il problema ammette sempre una soluzione.

9. **Teorema della corda in una circonferenza**: in una circonferenza il rapporto tra una corda e il seno di uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza che insistono su quella corda è uguale al diametro della circonferenza. Quindi in una circonferenza una corda è uguale al prodotto del diametro per il seno dell'angolo alla circonferenza da essa sotteso.

10. **Teorema dei seni**: in un triangolo i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti e il rapporto costante fra un lato e il seno dell'angolo opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo: $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$.

11. **Teorema di Carnot**: in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo che essi formano: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

12. **Risoluzione dei triangoli obliquangoli**:

a) dati il lato a e i due angoli β e γ, calcolare α, b e c: $\alpha = \pi - \beta - \gamma$, $b = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$, $c = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$; il problema ammette sempre una soluzione se $\beta + \gamma < \pi$;

b) dati i due lati a e b e l'angolo opposto a uno di essi α, calcolare c, β e γ.

- se $b \operatorname{sen} \alpha > a$ il problema è impossibile;

- se b sen $\alpha = a$ il problema è possibile solo se $\alpha < \pi/2$, e allora $\beta < \pi/2$ e il triangolo è rettangolo in B;

- se b sen $\alpha < a$ dalla formula $\text{sen}\,\beta = \dfrac{b\,\text{sen}\,\alpha}{a}$ si ottengono due valori supplementari β_1 e $\beta_2 = \pi - \beta_1$; sono possibili tre casi:

  - $b < a$: deve risultare $\beta < \alpha$ e perciò $\beta < \pi$; è accettabile solo β_1;

  - $b = a$: deve risultare $\beta = \alpha$ e perciò il problema ammette una sola soluzione $\beta_1 = \alpha$ se $\alpha < \pi/2$;

  - $b > a$: deve risultare $\beta > \alpha$ e perciò il problema ammette due soluzione β_1 e $\beta_2 = \pi - \beta_1$ se $\alpha < \pi/2$;

c) dati i due lati a e b e l'angolo compreso γ, calcolare c, α e β: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$;

d) dati i tre lati a, b e c, calcolare i tre angoli α, β e γ. $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

13. L'**area di un triangolo** è data dal semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso.