Definizioni fondamentali

Sistema di ascisse su una retta

1. Una **retta** si dice **orientata** quando su di essa è fissato un verso di percorrenza.

2. Dati due punti qualsiasi *A* e *B* di una retta orientata *r*, il segmento *AB* che può essere percorso da *A* verso *B* si dice **segmento orientato**.

3. Un segmento orientato di una retta orientata è **positivo** se il segmento ha la stessa orientazione della retta; **negativo** se il segmento e la retta hanno orientazione discorde.

4. Se *A* coincide con *B* il segmento *AB* si dice **nullo**.

5. Quando su una retta orientata si considera il segmento orientato *AB* non nullo, ad esso viene associata una **misura algebrica** o **misura relativa** o **misura orientata** rispetto ad un segmento **u** assunto come unità di misura; se *AB* è un segmento positivo la sua misura è un numero positivo, mentre se *AB* è un segmento negativo al sua misura è un numero negativo. La misura algebrica di un segmento orientato *AB* si indica con $\overline{AB}$, che si dice **distanza algebrica** o **distanza relativa** o **distanza orientata** tra *A* e *B*.

6. Si ha $\overline{AB} = -\overline{BA}$, da cui $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$.

7. Su *r* vale la **identità di Charles**: $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ essendo *A, B, C* tre punti qualsiasi di *r* e considerando le misure in senso relativo.

8. Considerata una retta orientata *r*, si fissi arbitrariamente un punto *O* si di essa, detto **punto origine** o **origine**. Il punto *O* divide la retta *r* in due semirette: una **positiva** che contiene i punti successivi a *O* nel verso positivo, e l'altra **negativa** che contiene i punti che precedono *O*.

9. Fissata un'unità di misura **u** ad ogni punto *P* di *r*, il numero reale relativo *x* che è la misura algebrica, rispeto a **u**, del segmento orientato *OP* si dice **coordinata ascissa** o **ascissa** del punto *P*. Per indicare che *x* è l'ascissa di *P*, si usa il simbolo *P(x)*.

10. Quando si fissa su una retta un punto *O* come origine, un verso positivo e un'unità di misura, si dice che si è fissato sulla retta **un sistema di coordinate ascisse** o semplicemente un **sistema di ascisse**.

11. Un sistema di ascisse stabilisce una **corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l'insieme dei numeri reali**. Questa corrispondenza biunivoca permette di individuare i punti della retta mediante numeri.

12. Su una retta in cui è fissato un sistema di ascisse, la **distanza orientata** tra due punti è uguale alla differenza, nell'ordine, tra l'ascissa del secondo punto e quella del primo: $\overline{A(x_1)B(x_2)} = x_2 - x_1$; la **distanza assoluta** tra i due punti è uguale al valore assoluto della differenza tra le ascisse dei due punti.

13. L'ascissa del **punto medio** di un segmento è uguale alla semisomma, cioè alla media aritmetica, delle ascisse degli estremi: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Coordinate cartesiane nel piano

1. Si dice che nel piano è stato fissato un **sistema di riferimento cartesiano ortogonale** *xOy* se sono state fissate due rette perpendicolari *x* e *y* ognuna delle quali dotata di un sistema di ascisse in modo che il punto di intersezione delle due rette *x* e *y* sia l'origine comune dei due sistemi di ascisse. Normalmente il verso positivo della retta *x* viene scelto verso destra e quello della retta *y* verso l'alto.

2. Se l'unità di misura è la stessa sulle due rette *x* e *y*, il sistema si dice **monometrico**; il caso contrario il sistema sarà **dimetrico**.

3. A un generico punto *P* del piano si possono far corrispondere due numeri *x* e *y* corrispondenti alle coordinate ascisse delle proiezioni sulle due rette *x* e *y* del punto *P*. I due numeri prendono il nome di **coordinate** del punto *P*: il primo si dice **ascissa** di *P* e il secondo **ordinata** di *P*. Gli assi *x* e *y* si dicono rispettivamente **asse delle ascisse** e **asse delle ordinate**.

4. Un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali stabilisce quindi una **corrispondenza biunivoca** tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri relativi. Per indicare che *x* e *y* sono le coordinate del punto *P* si scrive *P(x, y)*. Questa corrispondenza biunivoca permette di individuare i punti del piano mediante coppie di numeri.

5. I due assi *x* e *y* dividono il piano il quattro angoli che si dicono **quadranti**. Il primo quadrante è convenzionalmente quello in alto a destra e per la numerazione degli altri si procede in verso antiorario.

6. La **distanza assoluta** *d* di due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ nel piano è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenza delle coordinate omonime dei due punti: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

7. Le coordinate del **punto medio** di un segmento è uguale alla semisomma, cioè alla media aritmetica, delle coordinate degli estremi: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

8. Siano dati i due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Le coordinate del punto *P(x, y)* che divide internamente il segmento *AB* in parti proporzionali ai numeri *m* e *n*, cioè tale che sia $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$ $(m,\ n > 0)$ sono $x_P = \dfrac{nx_1 + mx_2}{n + m}$, $y_P = \dfrac{ny_1 + my_2}{n + m}$.

9. Siano dati i tre punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$. Le coordinate del baricentro *G(x, y)* del triangolo *ABC* sono $x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Coordinate cartesiane nello spazio

1. Si dice che nello spazio è stato fissato un **sistema di riferimento cartesiano ortogonale** se sono state fissate tre rette *x, y, z* uscenti da un punto *O* e ortogonali a due a due, ognuna delle quali dotata di un sistema di ascisse in modo che il punto di intersezione delle tre rette *x, y, z* sia l'origine comune dei sistemi di ascisse. Le tre rette si dicono **assi coordinati** e i tre piani che esse individuano **piani coordinati**.

2. A un generico punto *P* dello spazio si possono far corrispondere tre numeri *x, y, z* corrispondenti alle coordinate ascisse delle proiezioni sulle tre rette *x, y, z* del punto *P*. I tre numeri prendono il nome di **coordinate cartesiane** del punto *P*: il primo si dice **ascissa** di *P* e il secondo **ordinata** di *P*, il terzo **quota** di *P*.

3. Un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali stabilisce quindi una **corrispondenza biunivoca** tra i punti dello spazio e le terne ordinate di numeri relativi. Per indicare che *x, y, z* sono le coordinate del punto *P* si scrive *P(x, y, z)*. Questa corrispondenza biunivoca permette di individuare i punti dello spazio mediante terne di numeri.

4. I tre assi *x, y, z* dividono il piano il otto regioni (triedri trirettangoli).

5. La **distanza assoluta** *d* di due punti $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ nel piano è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenza delle coordinate omonime dei due punti: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Introduzione alle geometria analitica piana

1. La **geometria analitica** è quella parte della matematica che studia e deduce le proprietà di certi luoghi geometrici mediante il calcolo algebrico, cioè mediante un metodo analitico. La **geometria razionale**, al contrario, usa per indagare sulle figure geometriche un metodo sintetico che consiste nel dedurre tali proprietà a partire da alcune ipotesi, mediante ragionamenti che si sviluppano all'interno della geometria stessa.

2. Si dice **luogo geometrico piano** l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una data proprietà.

3. Ogni proprietà caratteristica dei punti di un luogo geometrico γ può essere tradotta in una relazione algebrica tra l'ascissa e l'ordinata dei punti $P(x, y)$ del luogo geometrico, ossia in un'equazione del tipo $F(x, y) = 0$ che deve essere soddisfatta dalle coordinate dei punti del luogo e soltanto da esse. L'equazione $F(x, y)$ si dice **equazione del luogo**. Nei casi più comuni l'equazione del luogo ammette infinite soluzioni e il luogo ha infiniti punti che costituiscono il **diagramma** o la **curva** rappresentativa dell'equazione.

4. Una curva si dice **curva algebrica** se essa è rappresentata da un'equazione algebrica.

5. Se l'equazione $F(x, y)$ è un **polinomio di primo grado** in x e y: $ax + by + c = 0$, esso rappresenta una **retta** purché non sia $a = 0 \wedge b = 0$.

6. Se l'equazione $F(x, y)$ è un **polinomio di secondo grado** in x e y: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, esso rappresenta, se ha soluzioni, una **conica**, ossia una **circonferenza**, un'**ellisse**, una **parabola**, un'**iperbole** o una forma degenere di queste curve.

7. Tali curve si ottengono sezionando un cono circolare retta a due falde con un piano:

    a) si ottiene l'ellisse tagliando la superficie conica con un piano che incontri, su una sola falda, tutte le generatrici della superficie; se tale piano è perpendicolare all'asse della superficie conica si ottiene una circonferenza;

    b) si ottiene la parabola tagliando la superficie conica con un piano che incontri, su una sola falda, tutte le generatrici della superficie tranne una;

    c) si ottiene l'iperbole tagliando la superficie conica con un piano che incontri, su ambedue le falde, tutte le generatrici della superficie tranne due.

8. Se una curva è chiusa può essere rappresentata solamente da una funzione in forma implicita.

9. Sia $P(x_0, y_0)$ un punto di intersezione tra due curve γ_1 e γ_2 rappresentate rispettivamente dalle equazioni $F_1(x, y) = 0$ e $F_2(x, y) = 0$. (x_0, y_0) è soluzione del sistema $\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$. Il sistema è:

    a) di 1° grado se γ_1 e γ_2 sono rette;

    b) di 2° grado se γ_1 è una retta e γ_2 una conica, o viceversa;

    c) di 4° grado se γ_1 e γ_2 sono coniche;

    Le curve γ_1 e γ_2 avranno tanti punti di intersezioni quante sono le soluzioni reali di questo sistema, minori o uguali al grado del sistema.

10. In generale, una curva algebrica si dice di ordine n, se n è il massimo numero di punti che essa può avere in comune con una retta generica del piano.

Trasformazioni geometriche nel piano cartesiano

1. Si dice che un sistema *XO'Y* è **traslato** rispetto al sistema *xOy*, se è stata effettuata una traslazione τ che ha portato l'origine *O* nel punto *O'*. Se le coordinate di *O'* nel sistema *xOy* sono *O'(a, b)*, la relazione tra le coordinate di un generico punto *P* nel sistema *xOy* e nel sistema *XOY* è $\tau\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$ (traslazione diretta), o, che è lo stesso, $\tau^{-1}\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ (traslazione inversa).

2. Sia data una curva rappresentata nel sistema *xOy* dall'equazione in forma esplicita *y = f(x)* o in forma implicita *F(x, y)* = 0. La rappresentazione nel sistema traslato *XOY* di questa curva si ottiene trasformando l'equazione nella forma *Y = g(X)* o *G(X, Y)* = 0 mediante le formule $\tau\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$.

3. Si dice che un sistema *XOY* è **ruotato** rispetto al sistema *xOy*, se è stata effettuata una rotazione ρ che ha portato gli assi *x* e *y* a coincidere con le rette orientate *X* e *Y* passanti con origine comune *O* ruotate dello stesso angolo α rispetto a *x e y*. La relazione tra le coordinate di un generico punto *P* nel sistema *xOy* e nel sistema *XOY* è $\rho\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$ (rotazione diretta), o, che è lo stesso, $\rho^{-1}\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ Y = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ (rotazione inversa).

4. Sia data una curva rappresentata nel sistema *xOy* dall'equazione in forma esplicita *y = f(x)* o in forma implicita *F(x, y)* = 0. La rappresentazione nel sistema ruotato *XOY* di questa curva si ottiene trasformando l'equazione nella forma *Y = g(X)* o *G(X, Y)* = 0 mediante le formule $\rho\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$.

5. Consideriamo una generica curva γ di equazione *F(x, y)* = 0. Se la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to -x \\ y \to y \end{bmatrix}$ associata alla simmetria rispetto all'asse *y* lascia inalterata la sua equazione, cioè se *F(-x, y) = F(x, y)*, allora la curva γ è **simmetrica rispetto all'asse** *y*. L'asse *y* è l'asse di simmetria di γ. Nel caso in cui l'equazione sia esplicitabile nella forma *y = f(x)*, allora è la curva è il diagramma di una funzione pari.

6. Consideriamo una generica curva γ di equazione *F(x, y)* = 0. Se la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to x \\ y \to -y \end{bmatrix}$ associata alla simmetria rispetto all'asse *y* lascia inalterata la sua equazione, cioè se *F(x, -y) = F(x, y)*, allora la curva γ è **simmetrica rispetto all'asse** *x*. L'asse *x* è l'asse di simmetria di γ. In questo caso l'equazione non è esplicitabile nella forma *y = f(x)*.

7. Consideriamo una generica curva γ di equazione *F(x, y)* = 0. Se la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to -x \\ y \to -y \end{bmatrix}$ associata alla simmetria rispetto all'asse *y* lascia inalterata la sua equazione, cioè se *F(-x, -y) = F(x, y)*, allora la curva γ è **simmetrica rispetto all'origine**. L'origine *O* è il centro di simmetria di γ. Nel caso in cui l'equazione sia esplicitabile nella forma *y = f(x)*, allora è la curva è il diagramma di una funzione dispari.

8. Sia σ_C la simmetria centrale di centro $C(x_0, y_0)$, che trasforma un punto *P(x, y)* in un punto *P'(x', y')* in modo che *C* sia il punto medio di *PP'*. L'espressione analitica di σ_C è $\sigma_C\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$.

9. Consideriamo una generica curva γ di equazione *F(x, y)* = 0. Per ottenere l'equazione della curva γ_C simmetrica rispetto al punto $C(x_0, y_0)$ basta effettuare nell'equazione di γ la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to 2x_0 - x \\ y \to 2y_0 - y \end{bmatrix}$, che

è la **sostituzione associata** alla simmetria di centro $C(x_0, y_0)$: $\underset{\text{eq. di }\gamma}{F(x,y)=0} \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to 2x_0 - x \\ y \to 2y_0 - y \end{bmatrix}]{\sigma_C \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}} \underset{\text{eq. di }\gamma_C}{F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0}$. Se questa sostituzione lascia inalterata l'equazione della curva, essa è simmetrica rispetto al punto $C(x_0, y_0)$, che è detto **centro di simmetria** della curva γ.

10. Sia r una retta parallela all'asse x i cui punti abbiano tutti ordinata $y = q$. Sia σ_r la simmetria rispetto alla retta r, che trasforma un punto $P(x, y)$ in un punto $P'(x', y')$. L'espressione analitica di σ_r è $\sigma_r \begin{cases} x' = x \\ y' = 2q - y \end{cases}$.

11. Consideriamo una generica curva γ di equazione $F(x, y) = 0$. Per ottenere l'equazione della curva γ_r simmetrica rispetto alla retta r parallela all'asse x di equazione $y = q$ basta effettuare nell'equazione di γ la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to x \\ y \to 2q - y \end{bmatrix}$, che è la **sostituzione associata** alla simmetria rispetto alla retta r: $\underset{\text{eq. di }\gamma}{F(x,y)=0} \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to x \\ y \to 2q - y \end{bmatrix}]{\sigma_r \begin{cases} x' = x \\ y' = 2q - y \end{cases}} \underset{\text{eq. di }\gamma_r}{F(x, 2q - y) = 0}$. Se questa sostituzione lascia inalterata l'equazione della curva, essa è simmetrica rispetto alla retta r, che è detta **asse di simmetria** della curva γ.

12. Sia s una retta parallela all'asse y i cui punti abbiano tutti ordinata $x = p$. Sia σ_s la simmetria rispetto alla retta s, che trasforma un punto $P(x, y)$ in un punto $P'(x', y')$. L'espressione analitica di σ_s è $\sigma_s \begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = y \end{cases}$.

13. Consideriamo una generica curva γ di equazione $F(x, y) = 0$. Per ottenere l'equazione della curva γ_s simmetrica rispetto alla retta s parallela all'asse y di equazione $x = p$ basta effettuare nell'equazione di γ la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to 2p - x \\ y \to y \end{bmatrix}$, che è la **sostituzione associata** alla simmetria rispetto alla retta s: $\underset{\text{eq. di }\gamma}{F(x,y)=0} \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to 2p - x \\ y \to y \end{bmatrix}]{\sigma_s \begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = y \end{cases}} \underset{\text{eq. di }\gamma_s}{F(2p - x, y) = 0}$. Se questa sostituzione lascia inalterata l'equazione della curva, essa è simmetrica rispetto alla retta s, che è detta **asse di simmetria** della curva γ.

La retta

1. L'asse delle ascisse è rappresentato dall'equazione $y = 0$.

2. L'asse delle ordinate è rappresentato dall'equazione $x = 0$.

3. Una retta parallela all'asse delle ascisse a distanza q da esso ha equazione $y = q$.

4. Una retta parallela all'asse delle ordinate a distanza p da esso ha equazione $x = p$.

5. Una retta passante per l'origine ha equazione $y = mx$, dove m si dice **coefficiente angolare** della retta (o parametro direttivo) ed è tanto maggiore quanto maggiore è la pendenza della retta.

6. La retta di equazione $y = x$ è la **bisettrice** del primo-terzo quadrante. La retta di equazione $y = -x$ è la **bisettrice** del secondo-quarto quadrante.

7. Una retta generica del piano ha equazione in forma esplicita $y = mx + q$, dove m è il **coefficiente angolare** della retta e q è l'**ordinata all'origine**, intersezione della retta con l'asse delle ordinate.

8. Condizione necessaria e sufficiente perché due **rette**, non parallele all'asse delle ordinate, siano **parallele**, è che abbiano uguale coefficiente angolare.

9. Condizione necessaria e sufficiente perché due **rette**, non parallele agli assi, siano **perpendicolari**, è che i due coefficienti angolari siano l'uno l'opposto del reciproco dell'altro.

10. L'equazione $ax + by + c = 0$ è atta a rappresentare, al variare dei coefficienti a, b, c reali, qualsiasi retta del piano, ed è detta **equazione generale della retta** o anche equazione della retta in **forma implicita** Il coefficiente c è detto **termine noto**. Per $b \neq 0$ si ha coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b}$ e ordinata all'origine $q = -\frac{c}{b}$. Per $b = 0$ l'equazione è $x = -\frac{c}{a}$, ossia una parallela dell'asse delle ordinate.

11. L'equazione $y = mx + k$, $k \in R$, rappresenta un **fascio improprio** di rette non parallele all'asse y qualora di pensi m fisso e k variabile. La retta passante per l'origine ($k = 0$) si dice **retta base** del fascio. Un fascio di rette parallele all'asse y ha per equazione $x = k$.

12. L'equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$, dove m è il coefficiente angolare variabile in R, rappresenta un **fascio proprio** di rette di centro $C(x_0, y_0)$, con esclusione della parallela all'asse y. Per avere la totalità delle rette passanti per C basta porre l'equazione in forma implicita, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, $a, b \in R$.

13. Se nell'equazione del fascio di rette proprio passante per un punto si considera m fisso, la stessa equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ rappresenta la **retta passante per il punto** (x_0, y_0) **e avente un assegnato coefficiente angolare** m.

14. **Il coefficiente angolare della retta**, non parallela all'asse y, **passante per due punti dati** si ottiene come rapporto tra la differenza delle ordinate dei due punti e la differenza delle corrispondenti ascisse: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

15. Siano $P(x1, y1)$ e $Q(x2, y2)$ due punti tali che la retta PQ non sia parallela ad alcuno degli assi: l'equazione della **retta passante per i due punti dati** è $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

16. Se una retta interseca rispettivamente gli assi x e y nei punti $P(p, 0)$ e $Q(0, q)$, p e q si dicono **intercette all'origine** rispettivamente sull'asse x e y. L'equazione $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ è detta **equazione segmentaria** della retta.

17. La **distanza di un punto da una retta** di equazione $ax + by + c = 0$ si ottiene sostituendo nel primo membro dell'equazione della retta al posto di x e y le coordinate x_0 e y_0 del punto e dividendo il valore assoluto del risultato ottenuto per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti di x e y nell'equazione stessa: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

18. L'**asse di un segmento** di estremi $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, cioè il luogo dei punti equidistanti dagli estremi A e B, ha equazione $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$.

19. La **bisettrice degli angoli formati da due rette incidenti** di equazioni rispettivamente $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, cioè il luogo dei punti equidistanti dalle due rette date, ha equazione $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$.

20. Date due rette r e s di equazione $r \rightarrow ax + by + c = 0$ e $s \rightarrow a'x + b'y + c' = 0$, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, incidenti nel punto $C(x_0, y_0)$, la loro **combinazione lineare** $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ essendo k un parametro

reale rappresenta un **fascio proprio di rette** di centro $C(x_0, y_0)$, generato da r e s, con esclusione della retta s. Le rette r e s sono dette **rette basi** e si chiamano, rispettivamente, prima generatrice e seconda generatrice. Se si vogliono rappresentare tutte le rette passanti per C, compresa s, bisogna ricorrere a due parametri: $k_1(ax + by + c) + k_2(a'x + b'y + c') = 0$.

Le coniche

1. Una qualsiasi equazione algebrica di 2° grado in x e y del tipo $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, se ha soluzioni reali, rappresenta una **conica**, eventualmente degenere, e in particolare, detto $\Delta = b^2 - 4ac$ il **discriminante** della conica, si ha:

   a) per $\Delta < 0$ un'ellisse o una circonferenza;

   b) per $\Delta = 0$ una parabola;

   c) per $\Delta > 0$ un'iperbole.

2. L'equazione di una conica si dice in **forma normale** o **canonica** quando gli assi di simmetria della curva sono paralleli agli assi x e y del sistema di riferimento. In questo caso l'equazione mance del **termine rettangolare** in xy.

   3. Per determinare l'angolo di rotazione α degli assi di simmetria di una generica conica rispetto agli assi x e y è sufficiente applicare all'equazione della conica una rotazione $\rho^{-1}\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\alpha \\ Y = -x\,\text{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ e determinare α in modo che il termine rettangolare risulti nullo.

La circonferenza

1. La **circonferenza** è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.

2. L'equazione di una circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r è $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, che può anche essere scritta nella **forma normale** o **canonica** $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, dove $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$, $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.

3. Viceversa, ogni equazione del tipo $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ con $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$ rappresenta una circonferenza reale non degenere con centro $C\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$. Se $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma = 0$ la circonferenza ha raggio nullo e si dice **degenere** nel suo centro.

4. Per trovare le intersezioni di una circonferenza con una retta del suo piano, basta risolvere il sistema di secondo grado formato dalle loro equazioni: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$. Se le due soluzioni sono reali e distinte, la retta è seconta la circonferenza; se le due soluzioni sono reali e coincidenti, la retta è tangente alla circonferenza; se le soluzioni non sono reali, la retta è esterna alla circonferenza.

5. Per trovare le intersezioni di due circonferenze, basta risolvere il sistema di quarto grado formato dalle loro equazioni: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$. Se le due circonferenze non sono concentriche ($\alpha \neq \alpha' \vee \beta \neq \beta'$), sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ (\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + \gamma - \gamma' = 0 \end{cases}$$ che rappresenta le intersezioni della prima circonferenza con la retta di equazione $(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta') + \gamma - \gamma' = 0$, detta **asse radicale** delle due circonferenze. Questa retta congiunge i due punti di intersezione se le due circonferenze sono secanti, oppure è la tangente comune alle due circonferenze se sono tangenti (internamente o esternamente).

6. Date due circonferenze δ e δ' non concentriche di equazione $\delta \to x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ e $\delta' \to x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$, la loro **combinazione lineare** $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma + k(x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma') = 0$ essendo k un parametro reale rappresenta un **fascio di circonferenze**, generato da δ e δ', con esclusione della circonferenza δ'. Per $k = -1$ l'equazione si riduce all'equazione dell'asse radicale di δ e δ', che si conviene di considerare come l'equazione degenenere del fascio con raggio infinito. Le intersezioni A e B delle circonferenze δ e δ' generatrici del fascio sono dette **punti base del fascio**. Se si vogliono rappresentare tutte le circonferenze del fascio, compresa δ', bisogna ricorrere a due parametri: $k_1(x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma) + k_2(x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma') = 0$.

La parabola

1. La **parabola** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F (detto **fuoco**) e da una retta data d (detta **direttrice**).

2. La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice è l'**asse di simmetria** della parabola.

3. L'intersezione della parabola con il suo asse di simmetria è il **vertice** della parabola.

4. L'equazione di una parabola di vertice $V(x_0, y_0)$ e asse di simmetria parallela all'asse y è $y = ax^2 + bx + c$, dove $b = -2ax_0$, $c = ax_0^2 + y_0$. Se si considera a variabile, questa equazione è quella di un **fascio di parabole** tutte con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice in $V(x_0, y_0)$.

5. Viceversa, ogni equazione di secondo grado del tipo $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y.

6. Le coordinate del **vertice** V di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con asse di simmetria parallelo all'asse y sono $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

7. Le coordinate del **fuoco** F di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con asse di simmetria parallelo all'asse y sono $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

8. L'equazione dell'**asse** di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con asse di simmetria parallelo all'asse y è $x = -\frac{b}{2a}$.

9. L'equazione della **direttrice** d di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con asse di simmetria parallelo all'asse y è $y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

10. Il segno di a determina la concavità della parabola:

    a) per $a > 0$ la parabola volge la concavità verso l'alto;

    b) per $a < 0$ la parabola volge la concavità verso il basso;

    c) per $a = 0$ si ha una parabola degenere (retta coincidente con la direttrice).

11. Due parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y sono **congruenti** se hanno uguale, nelle loro equazioni scritte nella forma $y = ax^2 + bx + c$, il valore assoluto del coefficiente a (**coefficiente di apertura**).

12. Per trovare le intersezioni di una parabola con una retta del suo piano, basta risolvere il sistema di secondo grado formato dalle loro equazioni: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$. Se le due soluzioni sono reali e distinte, la retta è seconta la parabola; se le due soluzioni sono reali e coincidenti, la retta è tangente alla parabola; se le soluzioni non sono reali, la retta è esterna alla parabola. Se la retta è parallela all'asse y, cioè all'asse di simmetria della parabola ($x = h$), la retta interseca la parabola in un solo punto.

13. Date due parabole γ e γ' non concentriche di equazione in forma implicita $\gamma \rightarrow y - ax^2 - bx - c = 0$ e $\gamma' \rightarrow y - a'x^2 - b'x - c' = 0$, la loro **combinazione lineare** $y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0$ essendo k un parametro reale rappresenta un **fascio di parabole**, generato da γ e γ', con esclusione della circonferenza γ'. Le intersezioni A e B delle parabole γ e γ' generatrici del fascio sono dette **punti base del fascio**. Se si vogliono rappresentare tutte le circonferenze del fascio, compresa γ', bisogna ricorrere a due parametri: $k_1(y - ax^2 - bx - c) + k_2(y - a'x^2 - b'x - c') = 0$. Per $k = -1$ l'equazione si riduce all'equazione delle rette parallele all'asse y passanti per A e per B (la parabola degenere è costituita dall'unione di queste due rette), mentre per $k = -\frac{a}{a'}$ l'equazione si riduce all'equazione della retta passante per A e B.

14. Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ sono due punti con $x_1 \neq x_2$ e $y = mx + q$ è l'equazione della retta che li congiunge, allora l'equazione $y = mx + q + k(x - x_1)(x - x_2)$ rappresenta il fascio di parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y avente A e B come punti base.

L'ellisse

1. L'**ellisse** è il luogo dei punti di un piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

2. Siano F_1 e F_2 i due **fuochi** dell'ellisse. Il punto medio del segmento F_1F_2 si dice **centro** C dell'ellisse. La distanza tra i due fuochi si dice **distanza focale** (si chiama semidistanza focale la distanza c di un vertice dal centro). Le intersezioni A_1 e A_2 dell'ellisse con la retta che contiene i due fuochi F_1 e F_2 si dicono **vertici** dell'ellisse. Il segmento A_1A_2 che congiunge i vertici si chiama **asse maggiore** dell'ellisse. Il segmento B_1B_2 congiungente le intersezioni B_1 e B_2 dell'ellisse con l'asse dell'asse maggiore passante per il centro dell'ellisse si dice **asse minore** dell'ellisse. Le misure a e b dei segmenti CA_1 e CB_1 si dicono **semiassi** dell'ellisse. La somma costante delle distanze di un punto dell'ellisse dai due fuochi è pari a $2a$. la distanza tra uno dei fuochi e il centro si indica con c (semidistanza focale).

3. Si dice **eccentricità** e di un'ellisse il rapporto, minore dell'unità, tra la semidistanza focale c e il semiasse maggiore a: $e = \frac{c}{a}$.

4. L'equazione in **forma normale** o **canonica** di un'ellisse con centro in $C(x_0, y_0)$ con asse maggiore parallelo all'asse x è $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$. L'equazione dell'ellisse con asse maggiore parallelo all'asse x può essere sviluppata nella forma $mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$, con $m = b^2$, $n = a^2$, $p = -2x_0b^2$, $q = -2y_0a^2$, $r = x_0^2b^2 + y_0^2a^2 - a^2b^2$.

5. Ogni equazione del tipo $mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$, con m e n non nulli e concordi e $s = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r$ concorde con m e n, rappresenta un'ellisse con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati e di centro $C\left(-\frac{p}{2m}, -\frac{q}{2n}\right)$ e semiassi $a = \sqrt{\frac{s}{m}}$ e $b = \sqrt{\frac{s}{n}}$. Se $a > b$ l'asse maggiore è parallelo all'asse x;

per $a < b$ l'asse maggiore è parallelo all'asse y. Per $s = 0$ l'equazione rappresenta un'ellisse degenere nel suo centro.

6. La semidistanza focale c è legata ai semiassi dell'ellisse dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$. Per $c = 0$ si ha una circonferenza di raggio a.

7. Per le posizioni reciproche tra una retta e un'ellisse valgono le stesse considerazioni fatte per le posizioni reciproche tra una retta e una circonferenza.

L'iperbole

1. L'**iperbole** è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

2. Siano F_1 e F_2 i due **fuochi** dell'iperbole. Il punto medio del segmento F_1F_2 si dice **centro** C dell'iperbole. La distanza tra i due fuochi si dice **distanza focale** (si chiama semidistanza focale la distanza c di un vertice dal centro). Le intersezioni A_1 e A_2 dell'iperbole con la retta che contiene i due fuochi F_1 e F_2 si dicono **vertici** dell'iperbole. Il segmento A_1A_2 che congiunge i vertici si chiama **asse trasverso** dell'iperbole, come la retta a cui esso appartiene. Si indica con a la lunghezza del segmento CA_1 che congiunge il centro con uno dei vertici. Le tangenti all'iperbole nei due vertici delimitano una striscia del piano di larghezza $2a$ che non contiene punti dell'iperbole. L'iperbole è quindi costituita da due **rami**.

3. Esistono due rette passanti per il centro dell'iperbole che non intersecano l'iperbole, ma si avvicinano ad essa indefinitamente man mano che ci si allontana dall'origine. Tali rette si chiamano **asintoti** dell'iperbole. L'asse dell'asse traverso passante per il centro, come il segmento B_1B_2 che su di esso congiunge le intersezioni B_1 e B_2 delle congiungenti le intersezioni degli asintoti con le tangenti all'iperbole nei suoi vertici, si chiama **asse non trasverso** dell'iperbole. Si indica con b la lunghezza del segmento CB_1 che congiunge il centro con il punto B_1.

4. Si dice **eccentricità** e di un'iperbole il rapporto, maggiore dell'unità, tra la semidistanza focale c e il semiasse trasverso a: $e = \frac{c}{a}$.

5. L'equazione in **forma normale** o **canonica** di un'iperbole con centro in $C(x_0, y_0)$ con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati è $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$. Se si prende il segno più al secondo membro si ha l'equazione di un'iperbole con asse trasverso parallelo all'asse x; se si prende il segno meno al secondo membro si ha l'equazione di un'iperbole con asse trasverso parallelo all'asse y. L'equazione dell'ellisse con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati può essere sviluppata nella forma $mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$.

6. Ogni equazione del tipo $mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$, con m e n non nulli e discordi, rappresenta un'iperbole con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati e di centro $C\left(-\frac{p}{2m}, -\frac{q}{2n}\right)$ e semiassi $a = \sqrt{\left|\frac{s}{m}\right|}$ e $b = \sqrt{\left|\frac{s}{n}\right|}$, dove $s = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r$. Se s è concorde con m l'asse trasverso è parallelo all'asse x; per s discorde da m l'asse trasverso è parallelo all'asse y. Per $s = 0$ l'equazione rappresenta un'ellisse degenere in una coppia di rette coincidenti con i suoi asintoti.

7. La semidistanza focale c è legata ai semiassi dell'iperbole dalla relazione $c^2 = a^2 + b^2$.

8. Le equazioni dei due asintoti dell'iperbole di centro $C(x_0, y_0)$ e semiassi a e b sono $(y - y_0) = \pm \frac{a}{b}(x - x_0)$.

9. Per le posizioni reciproche tra una retta e un'ellisse valgono le stesse considerazioni fatte per le posizioni reciproche tra una retta e una parabola.

10. Se le lunghezze *a* e *b* dei due semiassi dell'iperbole sono uguali, l'iperbole si dice **equilatera**. Gli asintoti di un'iperbole equilatera sono perpendicolari.

11. L'equazione di un'iperbole equilatera con asintoti coincidenti con gli assi cartesiani è $xy = k$.

12. La funzione di equazione $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ dove *a, b, c, d* sono numeri assegnati, si dice **funzione omografica**. Per $c \neq 0$ e $D = ad - bc \neq 0$ la funzione omografica rappresenta un'iperbole equilatera con centro $C\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ e asintoti paralleli agli assi coordinati.

Coordinate polari nel piano

1. Fissato a) un punto *O* nel piano detto **polo**; b) una semiretta *Ox*, detta **asse polare**, avente origine nel punto *O*; c) un verso positivo delle rotazioni intorno al polo e d) un'unità di misura *U* per i segmenti; risulta stabilito un sistema di **coordinate polari**.

2. La distanza *d* di un punto *P* del piano dal polo si dice **modulo** o **raggio vettore** di *P*; l'angolo θ di cui l'asse polare deve ruotare per sovrapporsi al segmento *OP* si dice **anomalia** o **angolo di direzione** di *P*. Il raggio vettore *d* e l'anomalia θ costituiscono le coordinate polari di *P*.

3. Le trasformazioni dalle coordinate polari di un punto *P* alle sue coordinate cartesiane sono $x_P = d \cos \theta$, $y_P = d \operatorname{sen} \theta$.

4. Le trasformazioni dalle coordinate cartesiane di un punto *P* all sue coordinate polari sono $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

5. Sia data una retta *r*; indichiamo con α l'angolo che la normale a *r* condotta dal polo *O* forma con l'asse polare, e con *a* la distanza del polo dalla retta *r*. L'equazione della retta *r* in coordinate polari è allora $d = \frac{a}{\cos(\alpha - \theta)}$.

6. Sia data una circonferenza di raggio *r*. Se il polo del sistema di coordinate polari è un punto della circonferenza, l'equazione della circonferenza in coordinate polari è $d = 2r \cos \theta$. Se il polo del sistema di coordinate polari è il centro della circonferenza, l'equazione della circonferenza in coordinate polari è $d = r$.