Funzioni

Definizioni fondamentali

1. *Dati due insiemi non vuoti X e Y si chiama* **applicazione** *o* **funzione** *da X a Y una relazione tra i due insiemi che* **ad ogni** $x \in X$ *fa corrispondere* **uno ed un solo** $y \in Y$.

   Se y è l'immagine di x tramite f, si scrive $y = f(x)$.

2. L'insieme X è il **dominio** dell'applicazione. Considerato un *qualsiasi* $x \in X$ esso ha una sola immagine in Y per mezzo della f. Si chiama **codominio** dell'applicazione o **insieme delle immagini** il sottoinsieme proprio o improprio di Y formato dagli elementi che hanno almeno una controimmagine in X. Il codominio, che viene indicato con $f(X)$, è detto anche **insieme di variabilità** della funzione.

3. Quando il dominio e il codominio di un'applicazione sono sottinsiemi propri o impropri dell'insieme R dei numeri reali, si parla di **funzione reale di variabile reale**. Il generico elemento x del dominio è detto **variabile indipendente**, e il generico elemento y del codominio **variabile indipendente**.

4. Per le funzioni reali di variabile reale si può dare la seguente definizione dovuta a Dirichlet:

   Una variabile reale y si dice **funzione** *di una variabile reale x in un dominio D, sottoinsieme dei numeri reali, se esiste una legge f, di natura qualsiasi, che faccia corrispondere a un qualsiasi x del dominio uno e un solo valore di y*.

5. Si conviene che il dominio D di una funzione reale di variabile reale, se non specificato, provenga dalla condizione di esistenza dell'espressione analitica della funzione: per questo è chiamato anche *campo di esistenza* (C.E.) o *insieme di esistenza* (I.E.) o *insieme di definizione* (I.D.). Il sottoinsieme del dominio D in corrispondenza del quale la funzione f assume valori positivi si dice *insieme di positività* (I.P.); il sottoinsieme del dominio D in corrispondenza del quale la funzione f assume valori negativi si dice *insieme di negatività* (I.P.). Il codominio C si dice anche *insieme di variabilità* (I.V.).

6. Si chiama **insieme numerico** un insieme i cui elementi siano numeri.

7. Si dice che l'insieme numerico A è **limitato superiormente**, se esiste un numero k maggiore di tutti gli elementi dell'insieme A. Se non esiste un tale numero k, l'insieme A è *illimitato superiormente*.

8. Si dice che l'insieme numerico A è **limitato inferiormente**, se esiste un numero k minore di tutti gli elementi dell'insieme A. Se non esiste un tale numero k, l'insieme A è *illimitato inferiormente*.

9. Se l'insieme A è limitato sia superiormente che inferiormente, si dice semplicemente che è **limitato**.

10. Dato un insieme numerico A, non vuoto e limitato superiormente, si dice **estremo superiore** dell'insieme quel numero L tale che: *a*) ogni elemento dell'insieme è minore o uguale a L; *b*) comunque si scelga un numero $\varepsilon > 0$, esiste almeno un elemento dell'insieme maggiore di $L - \varepsilon$. Si può dimostrare che per *un insieme non vuoto e limitato superiormente l'estremo superiore esiste sempre ed è unico*. Se un insieme A è illimitato superiormente si conviene di dire che il suo estremo superiore è $+\infty$.

11. Dato un insieme numerico A, non vuoto e limitato inferiormente, si dice **estremo inferiore** dell'insieme quel numero l tale che: *a*) ogni elemento dell'insieme è maggiore o uguale a l; *b*) comunque si scelga un numero $\varepsilon > 0$, esiste almeno un elemento dell'insieme minore di $l + \varepsilon$. Si può dimostrare che per *un insieme non vuoto e limitato inferiormente l'estremo inferiore esiste sempre ed è unico*. Se un insieme A è illimitato inferiormente si conviene di dire che il suo estremo inferiore è $-\infty$.

12. Se l'estremo superiore appartiene all'insieme A, esso coincide con l'elemento **massimo**, cioè con il maggiore di tutti gli elementi dell'insieme. Se l'estremo inferiore appartiene all'insieme A, esso coincide con l'elemento **minimo**, cioè con il minore di tutti gli elementi dell'insieme.

13. Poiché l'insieme R dei numeri reali e l'insieme X dei punti di una retta r possono essere messi in corrispondenza biunivoca, un insieme numerico può anche essere denominato **insieme lineare di punti**.

14. Si chiama **intorno completo** di un numero reale c un qualsiasi intervallo al quale appartenga c come elemento interno; se non si specifica diversamente l'intorno si considera *aperto*; in simboli, $I(c) = (c - \delta_1, c + \delta_2)$, con δ_1 e δ_2 numeri positivi; se $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ l'intorno $I(c)$ è simmetrico rispetto a c e si dice *intorno circolare* di raggio δ. Si chiama **intorno sinistro** del numero reale c l'insieme di tutti i numeri di un intervallo aperto avente c come estremo destro: $I_s(c) = (c, c + \delta)$. Analogamente si definisce l'**intorno destro** del numero reale c: $I_d(c) = (c - \delta, c)$. Si definisce **intorno di più infinito** un qualsiasi intervallo illimitato del tipo $I(+\infty) = (a, +\infty)$. Si definisce **intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo illimitato del tipo $I(-\infty) = (-\infty, d)$. Si definisce come **intorno di infinito** l'unione $I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) = (-\infty, d) \cup (a, +\infty)$. Se $a = -d = k > 0$ si dice che l'intorno di infinito è simmetrico ed ha raggio k.

15. Un punto C di un insieme lineare è **isolato** quando esiste un intorno di C che non contiene altri punti dell'insieme. Un punto C è un **punto limite** o **punto di accumulazione** di un insieme lineare se, in ogni intorno di C, esistono infiniti punti dell'insieme.

16. Se un insieme lineare limitato ha l'estremo superiore L (estremo inferiore l), tale estremo è anche punto di accumulazione. Una funzione f di dominio D si dice limitata in D se l'insieme numerico $C = f(D)$ risulta limitato. Si definisce **estremo superiore** (o **inferiore**) della funzione f l'estremo superiore (o inferiore) del codominio. Se l'insieme numerico $f(D)$ ammette anche il massimo e il minimo, questi vengono detti **massimo** e **minimo** *assoluti* della funzione in D.

17. Se il punto (x, y) si sposta continuamente su una curva $y = f(x)$ in modo tale che almeno una delle coordinate del punto tende all'infinito e che la distanza di questo punto da una certa retta tende a zero, questa retta si chiama **asintoto** della curva.

Classificazione delle funzioni

1. **Funzioni algebriche**: sono le funzioni reali di variabile reale per cui il valore y della variabile dipendente si ottiene, a partire dal valore x della variabile indipendente, eseguendo un numero finito di operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione elevamento a potenza ed estrazione di radice n-esima ($n \in N_0$).

2. Se le operazioni da eseguire sulla x sono solo addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni ed elevamento a potenza con esponente intero positivo, si parla di **funzioni razionali intere**. Se si ha anche l'operazione di divisione, di hanno le **funzioni razionali fratte**. Se compaiono estrazioni di radice n-esima si hanno le **funzioni irrazionali**.

3. **Funzioni trascendenti**: sono le funzioni reali di variabile reale che non sono algebriche. Tra esse vi sono le **funzioni goniometriche** e le loro inverse, le **funzioni esponenziali** e le **funzioni logaritmiche**.

4. **Funzione pari**: una funzione f di dominio D si dice *pari* se $\forall\, x \in D, f(-x) = f(x)$.

5. **Funzione dispari**: una funzione f di dominio D si dice *dispari* se $\forall\, x \in D, f(-x) = -f(x)$.

6. **Funzione crescente**: una funzione f si dice *crescente in senso stretto o strettamente crescente* nel suo dominio D (o in suo sottoinsieme) se $\forall\, x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Si dice *crescente in senso lato* se $\forall\, x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

7. **Funzione decrescente**: una funzione f si dice *decrescente in senso stretto o strettamente decrescente* nel suo dominio D (o in suo sottoinsieme) se $\forall\, x_1, x_2 \in D, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Si dice *decrescente in senso lato* se $\forall\, x_1, x_2 \in D, x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

8. **Funzione monotòna**: quando una funzione è sempre crescente o sempre decrescente in senso stretto in un insieme D, si dice che essa è *monotòna in senso stretto* in D. Analogamente si parla di funzione *monotòna in senso lato*.

9. **Funzione costante**: una funzione f si dice *costante* in un insieme D se $\forall\, x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2)$.

10. **Funzione iniettiva** (o *iniezione*): una funzione *f* si dice *iniettiva* se $\forall\ x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ossia $\forall\ x_1, x_2 \in D$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

11. **Funzione suriettiva** (o *suriezione*): una funzione *f* da *X* a *Y* si dice *suriettiva* se il suo codominio coincide con *Y*.

12. **Funzione biunivoca** (o *biiezione*): una funzione *f* si dice *biunivoca* se è iniettiva e suriettiva.

13. **Funzione inversa**: si chiama *funzione inversa* di una funzione biunivoca *f* e la si indica con il simbolo f^{-1} la corrispondenza che ad ogni elemento del codominio di *f* fa corrispondere la sua unica controimmagine.

14. **Funzione composta o funzione di funzione**: sia $z = g(x)$ l'espressione di una funzione di dominio *X* e codominio *Z*; sia $y = f(z)$ l'espressione di una funzione di dominio *Z* e codominio *Y*. Si chiama *funzione composta* di *f* con *g* la funzione *h* tale che $y = h(x) = f(z) = f(g(x))$.

15. **Funzione periodica**: una funzione *f* si dice *periodica* di periodo *T* se, per $x \in D$, è $f(x + kT) = f(x)$ essendo *k* un intero positivo, negativo o nullo e *T* il minimo numero positivo per cui si verifica l'uguaglianza (*T* è il *periodo principale*).

Definizione di funzioni particolari

1. **Parte intera** di *x* ($y = E(x)$ oppure $y = [x]$) :la funzione definita dalla seguente legge: $y = x$ se *x* è intero; y = al massimo intero relativo minore di *x*, se *x* non è intero.

2. **Mantissa** di *x*: $m(x) = x - E(x)$.

3. **Funzione di Dirichlet**: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per ogni x razionale} \\ 1 & \text{per ogni x irrazionale} \end{cases}$

4. $y = mx + q$ *retta*.

5. $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ *quadrica:* $\begin{cases} b^2 - 4ac < 0 & \text{ellisse o circonferenza} \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{parabola} \\ b^2 - 4ac < 0 & \text{iperbole} \end{cases}$

6. $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0 \right)$ *circonferenza*.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$ *ellisse*.

8. $y = ax^2 + bx + c$ o $r = \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ *parabola*.

9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ *iperbole*.

10. $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *seno iperbolico*.

11. $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *coseno iperbolico (catenaria)*.

12. $y = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *tangente iperbolica*.

13. $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *cotangente iperbolica*.

14. $y = \dfrac{a}{x^2 + 1}$ *versiera di Agnesi*.

15. $y = \dfrac{ax}{x^2 + 1}$ *serpentino di Newton*.

16. $y = \dfrac{ax^2}{x^2 + 1}$ *tridente di Newton*.

17. $y = \sqrt[3]{x^2}$ o $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ *parabola di Neile*.

18. $y = \pm x\sqrt{x}$ o $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ *parabola semicubica*.

19. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x}{a - x}}$ o $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{at^3}{1 + t^2} \end{cases}$ *cissoide di Diocle*.

20. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ o $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}$ *folium di Cartesio*.

21. $y^2 = x^2 \dfrac{a + x}{a - x}$ *strofoide*.

22. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ o $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ *lemniscata di Bernoulli*.

23. $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *cicloide*.

24. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ o $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ *ipocicloide (asteroide)*.

25. $r = a(1 + \cos\varphi)$ o $\begin{cases} x = a(\cos t - \cos 2t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) \end{cases}$ *cardioide*.

26. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) \end{cases}$ *evolvente del cerchio*.

27. $r = a\varphi$ $(r \geq 0)$ *spirale di Archimede*.

28. $r = e^{a\varphi}$ o $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} x/y}$ *spirale logaritmica*.

29. $r = \dfrac{a}{\varphi}$ $(r > 0)$ *spirale iperbolica*.

30. $r = a \operatorname{sen} 3\varphi$ $(r \geq 0)$ *rosa a tre foglie*.

31. $r = a\left|\operatorname{sen} 2\varphi\right|$ *rosa a quattro foglie*.

Limiti delle funzioni

1. Consideriamo una funzione *y = f(x)* definita in tutti i punti di un intervallo [*a*, *b*], eccetto al più un punto *c* interno all'intervallo.

2. **I caso**: si dice che*, per x tendente a c, la funzione y = f(x) ha per* **limite** *l e si scrive* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *se, fissato un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno completo di c tale che, per ogni x di tale intorno (escluso al più x = c), si abbia |f(x) – l|* < ε.

   Si dice che*, per x tendente a c dalla sinistra, la funzione y = f(x) tende a l per difetto, e si scrive* $\lim_{x\to c^-} f(x) = l^-$ *se, fissato un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno sinistro di c tale che, per ogni x di tale intorno, si abbia* 0 ≤ *l – f(x)* < ε. Analogamente si definiscono il limite destro e per eccesso. Se $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$ non esiste il $\lim_{x\to c} f(x)$.

3. **II caso**: si dice che, *per x tendente all'infinito, la funzione y = f(x) ha per* **limite** *l e si scrive* $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ *se, fissato un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno di infinito tale che, per ogni x di tale intorno, si abbia |f(x) – l|* < ε. Si dice allora che la retta di equazione *y = l* è **asintoto orizzontale** per la curva di equazione *y = f(x)*.

   Si dice che, *per x tendente a + ∞, la funzione y = f(x) tende a l per difetto e si scrive* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l^-$ *se, fissato un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno di + ∞ tale che, per ogni x di tale intorno, si abbia* 0 ≤ *l – f(x)* < ε. Analogamente si definiscono il limite per *x* tendente a – ∞ e per eccesso.

4. **III caso**: si dice che*, per x tendente a c, la funzione y = f(x) ha per* **limite** *infinito e si scrive* $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ *se, fissato un numero positivo M, arbitrariamente grande, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno completo di c tale che, per ogni x di tale intorno (escluso al più x = c), si abbia |f(x)|* > *M*. Si dice allora che la retta di equazione *x = c* è **asintoto verticale** per la curva di equazione *y = f(x)*.

   Si dice che*, per x tendente a c dalla sinistra, la funzione y = f(x) tende a – ∞ e si scrive* $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ *se, fissato un numero positivo M, arbitrariamente grande, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno destro di c tale che, per ogni x di tale intorno, si abbia f(x)* < – *M*. Analogamente si definiscono il limite destro e a + ∞.

5. **IV caso**: si dice che*, per x tendente all'infinito, la funzione y = f(x) ha per* **limite** *infinito e si scrive* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *se, fissato un numero positivo M, arbitrariamente grande, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno di infinito tale che per ogni x di tale intorno si abbia |f(x)|* > *M*.

   Si dice che*, per x tendente a + ∞, la funzione y = f(x) tende a + ∞ e si scrive* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se, fissato un numero positivo M, arbitrariamente grande, si può determinare, in corrispondenza di esso, un intorno*

$+\infty$ *tale che, per ogni x di tale intorno, si abbia f(x) > + M*. Analogamente si definiscono il limite a $-\infty$ e per x tendente a $-\infty$.

6. Se i limiti $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ e $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=q$ esistono, la retta $y = mx + q$ è un **asintoto destro** della curva di funzione *f(x)*. Se $m \neq 0$ l'asintoto è **obliquo**.

7. Se i limiti $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ e $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=q$ esistono, la retta $y = mx + q$ è un **asintoto sinistro** della curva di funzione *f(x)*. Se $m \neq 0$ l'asintoto è **obliquo**.

Teoremi sui limiti

1. Se una funzione *f(x)* ammette il limite finito *l*, la funzione $-f(x)$ ammette il limite $-l$.

2. Se la funzione *f(x)* ha per limite *l*, la funzione $f(x) - A$ ha per limite $l - A$.

3. **Teorema dell'unicità del limite**. Se, per $x \to c$, la funzione *f(x)* ammette un limite, questo è unico.

4. **Teorema della permanenza del segno**. Se per $x \to c$ la funzione *f(x)* tende al limite finito *l* diverso da zero, esiste un intorno di *c* per tutti i punti del quale, escluso al più *c*, i valori della funzione hanno lo stesso segno del limite.

5. Se in un intorno del punto *c*, escluso al più $x = c$, la funzione *f(x)* è positiva o nulla ed ammette limite *l* per $x \to c$, allora è $l \geq 0$.

6. Se in un intorno del punto *c*, escluso al più $x = c$, la funzione *f(x)* è negativa o nulla ed ammette limite *l* per $x \to c$, allora è $l \leq 0$.

7. **Primo teorema del confronto**. Se due funzioni *g(x)* e *h(x)* tendono allo stesso limite *l* per $x \to c$ ed una terza funzione *f(x)* è tale che, in un certo intorno *I* di *c*, escluso al più *c*, si abbia $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, allora è anche $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

8. **Secondo teorema del confronto**. Se due funzioni *f(x)* e *g(x)* sono tali che $|f(x)| \leq |g(x)|$ per tutti gli *x* di un intorno di *c* (escluso al più *c*) e se $g(x) \to 0$ per $x \to c$, allora anche $f(x) \to 0$ per $x \to c$.

9. **Terzo teorema del confronto**. Se *f(x)* e *g(x)* sono due funzioni che in un intorno di *c* (escluso al più $x = c$) soddisfano la condizione $|f(x)| \geq |g(x)|$ e se inoltre $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, allora risulta $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.

10. **Teorema sul limite del modulo di una funzione**. Se per $x \to c$ la funzione *f(x)* tende ad un limite finito *l*, allora $\lim_{x\to c}|f(x)| = |l|$, ossia il limite del modulo di una funzione è il modulo del limite.

11. Il limite della somma algebrica di più funzioni è uguale alla somma algebrica dei limiti delle singole funzioni.

12. Il limite del prodotto di più funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle singole funzioni. Se uno dei fattori tende a zero e gli altri a un limite finito, il prodotto tende a zero.

13. Il limite di una potenza, con esponente *n* positivo, di una funzione che tende a un limite finito è la potenza *n*-esima del limite.

14. Se, per $x \to c$, *f(x)* tende al limite finito *l*, diverso da zero, la funzione $1/f(x)$ tende, sempre per $x \to c$, al limite $1/l$.

15. Quando la funzione *f(x)* tende a zero, la funzione $1/f(x)$ tende all'infinito.

16. Quando la funzione *f(x)* tende all'infinito, la funzione 1/*f(x)* tende a zero.

17. Il limite di un quoziente di due funzioni, la seconda delle quali tende a un limite diverso da zero, è uguale al quoziente dei limiti.

18. Se *f(x)* tende al limite *l* ed è *l* > 0, allora $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ con $n \in N_0$. Se $l \leq 0$, il teorema vale solo se *n* è dispari.

19. Sia *y* = *f(x)* una funzione definita e crescente in un intorno sinistro *I* del punto *c*. Allora la funzione ammette limite per *x* che tende a *c* per difetto e precisamente: 1) se la funzione è limitata superiormente in *I* e se *L* è l'estremo superiore dei valori di *f(x)* al variare di *x* in *I*, allora risulta $\lim_{x \to c^-} f(x) = L^-$; 2) se la funzione non è limitata superiormente in *I*, allora è $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$. Il teorema vale anche se *I* è un intorno di +∞.

20. Sia *y* = *f(x)* una funzione definita e crescente in un intorno destro *I* del punto *c*. Allora la funzione ammette limite per *x* che tende a *c* per eccesso e precisamente: 1) se la funzione è limitata inferiormente in *I* e se *l* è l'estremo inferiore dei valori di *f(x)* al variare di *x* in *I*, allora risulta $\lim_{x \to c^+} f(x) = l^+$; 2) se la funzione non è limitata inferiormente in *I*, allora è $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$. Il teorema vale anche se *I* è un intorno di -∞.

21. Valgono i teoremi corrispondenti per le funzioni decrescenti.

Limiti notevoli

1. $\lim_{x \to c} k = k$

2. $\lim_{x \to c} x = c$

3. $\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$

4. $\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x} = 0$ con $k \neq 0$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{k}{x} = \infty$ con $k \neq 0$

6. $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+$ per $0 < a < 1$

7. $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$ per $a > 1$

8. $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ per $0 < a < 1$

9. $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ per $a > 1$

10. $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ per $a > 1$

11. $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ per $0 < a < 1$

12. $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$ per $a > 1$

13. $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$ per $0 < a < 1$

14. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} = \dfrac{a_0}{b_0} \lim_{x\to \infty} x^{m-n}$

15. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

18. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}7182818284\ldots$

Infinitesimi e infiniti

1. Una funzione $y = f(x)$ si dice **infinitesima** per $x \to c$ (eventualmente può essere anche $c = \infty$) se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

2. Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due infinitesimi simultanei per $x \to c$. Allora:

   a) Se $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$, per $x \to c$.

   b) Se $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$, per $x \to c$.

   c) Se $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine**, per $x \to c$.

   d) Se non esiste il $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, si dice che gli **infinitesimi** $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

3. Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ due infinitesimi simultanei per $x \to c$ (c finito o infinito). Si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine** α ($\alpha > 0$) rispetto a $\varphi(x)$, assunto come *infinitesimo campione*, se $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l \neq 0$. In pratica si conviene che, se non si dice nulla, l'infinitesimo campione sia $\varphi(x) = x$ se $x \to 0$, $\varphi(x) = x - c$ se $x \to c$, $\varphi(x) = 1/x$ se $x \to \infty$.

4. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ si può scrivere $f(x) = l + \delta(x)$, dove $\delta(x) = f(x) - l$ è un infinitesimo per $x \to c$.

5. Se $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α ($\alpha > 0$) per $x \to c$, rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x)$, si ha $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l \neq 0$ e si può scrivere $f(x) = l[\varphi(x)]^\alpha + \delta(x)[\varphi(x)]^\alpha$, dove $l[\varphi(x)]^\alpha$, che è un infinitesimo dello

stesso ordine α di $f(x)$, si dice **parte principale** dell'infinitesimo $f(x)$, mentre $\delta(x)[\varphi(x)]^\alpha$, che è un infinitesimo di ordine superiore ad α, si dice **parte complementare** dell'infinitesimo $f(x)$.

6. Una funzione $y = f(x)$ si dice **infinita** per $x \to c$ (eventualmente può essere anche $c = \infty$) se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$.

7. Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due infiniti simultanei per $x \to c$. Allora:

   a) Se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$, per $x \to c$.

   b) Se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$, per $x \to c$.

   c) Se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine**, per $x \to c$.

   d) Se non esiste il $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, si dive che gli **infiniti** $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

8. Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ due infiniti simultanei per $x \to c$ (c finito o infinito). Si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine** α ($\alpha > 0$) rispetto a $\varphi(x)$, assunto come *infinito campione*, se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l \neq 0$. In pratica si conviene che, se non si dice nulla, l'infinito campione sia $\varphi(x) = x$ se $x \to \infty$, $\varphi(x) = 1/x$ se $x \to 0$, $\varphi(x) = 1/(x - c)$ se $x \to c$.

9. Se $f(x)$ è un infinito di ordine α ($\alpha > 0$) per $x \to c$, rispetto all'infinito campione $\varphi(x)$, si ha $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l \neq 0$ e si può scrivere $f(x) = l[\varphi(x)]^\alpha + \delta(x)[\varphi(x)]^\alpha$, dove $l[\varphi(x)]^\alpha$, che è un infinito dello stesso ordine α di $f(x)$, si dice **parte principale** dell'infinito $f(x)$, mentre $\delta(x)[\varphi(x)]^\alpha$, che è un infinito di ordine superiore ad α, si dice **parte complementare** dell'infinito $f(x)$.

Funzioni continue

1. Una funzione $y = f(x)$ si dice **continua in un punto** c quando:

   a) esiste il valore della funzione per $x = c$, $f(x) = l$;

   b) esiste il limite finito della funzione per x tendente a c;

   c) e questo limite è uguale al valore della funzione in quel punto: $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

2. Quando $\lim_{x \to c^-} f(x) = l$ si dice che $f(x)$ è **continua in** c **dalla sinistra**. Se invece $\lim_{x \to c^+} f(x) = l$ si dice che $f(x)$ è **continua in** c **dalla destra**.

3. La somma, la differenza, il prodotto di più funzioni continue in un punto c sono funzioni continue in c. Una potenza qualunque ad esponente positivo di una funzione continua è ancora una funzione continua. Il quoziente di due funzioni continue in c è una funzione continua nello stesso punto, purché la funzione divisore non si annulli in c. Il valore assoluto di una funzione continua è una funzione continua.

4. Una funzione $y = f(x)$ si dice **continua in un intervallo** I se è continua in tutti i punti di quell'intervallo: $\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$, $\forall x \in I$.

5. Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo *chiuso e limitato* $[a; b]$, si ha che:
   a) Il codominio è un intervallo chiuso e limitato.
   b) La funzione ammette massimo e minimo assoluto in $[a; b]$ (**teorema di Weierstrass**).
   c) La funzione assume, almeno una volta, ogni valore compreso tra il minimo e il massimo (**Teorema di Bolzano**).
   d) Se la funzione assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a; b]$, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo $[a; b]$, in cui la funzione si annulla (**Teorema dell'esistenza degli zeri**).
6. La funzione costante è continua per qualsiasi valore di x.
7. La variabile indipendente è sempre continua.
8. Le funzioni razionali intere sono continue per qualsiasi valore di x.
9. Le funzioni razionali fratte sono continue per qualsiasi x del loro dominio.
10. La funzione $y = \sqrt[n]{x}$ (n intero positivo) è continua per ogni x nel suo dominio, cioè per qualunque x se n è dispari, e per $x \geq 0$ se n è pari.
11. Le funzioni sen x e cos x sono continue per ogni x.
12. Le funzioni tg x e cotg x sono continue per ogni x del loro dominio.
13. La funzione esponenziale $y = a^x$ ($a > 0$) è continua per ogni x.
14. La funzione $\log_a x$ è continua per ogni x positivo.
15. Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un insieme D ed ivi invertibile, allora la funzione inversa $x = g(x)$ è continua in $f(D)$.
16. Sia data la funzione composta $y = f[g(x)]$; se $z = g(x)$ tende a un limite finito l per $x \to c$ e se $f(z)$ è continua per $z = l$, allora $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left[\lim_{x\to c} g(x)\right] = f(l)$. Se poi $g(x)$ è anche continua per $x = c$, si ottiene $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left[\lim_{x\to c} g(x)\right] = f(g(c))$; quindi la funzione $f(g(c))$ è continua in $x = c$.
17. Consideriamo la funzione $y = [f(x)]^{g(x)}$ definita per i valori di x per cui la base è positiva e l'esponente esiste; se f e g sono funzioni continue tali da verificare il teorema sulla continuità delle funzioni composte, anche la funzione $y = [f(x)]^{g(x)}$ è continua nel suo dominio.

Discontinuità delle funzioni

1. Quando una funzione $f(x)$ non è continua in un punto $x = c$, si dice che in tale punto è **discontinua** e che $x = c$ è un **punto di discontinuità** (o anche *punto singolare*) per la funzione.
2. I punti di discontinuità si dividono in:
   a) **punti di discontinuità di prima specie**: si dice che per $x = c$ la funzione $f(x)$ ha un punto di discontinuità di prima specie quando *esistono* e sono *finiti e diversi tra loro i limiti dalla destra e dalla sinistra della funzione*, a prescindere dall'eventuale valore della $f(x)$ per $x = c$;

si chiama *salto* della funzione in $x = c$ il valore assoluto della differenza tra il limite destro e il limite sinistro: $salto = \left| \lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) \right|$;

b) **punti di discontinuità di seconda specie**: si dice che per $x = c$ la funzione $f(x)$ ha un punto di discontinuità di seconda specie quando non *esiste*, o non esiste *finito, uno almeno dei due limiti dalla destra e dalla sinistra della funzione*;

c) **punti di discontinuità di terza specie**: si dice che per $x = c$ la funzione $f(x)$ ha un punto di discontinuità di terza specie o **eliminabile** quando *esiste finito* il limite per $x \to c$ di $f(x)$, ma $f(c)$ o non esiste o è diversa dal valore del limite.

Successioni numeriche

1. Si chiama **successione numerica** una funzione definita nell'insieme N dei numeri naturali o in un suo sottoinsieme infinito, che ad ogni numero naturale dell'insieme di definizione fa corrispondere uno ed un solo numero reale.

2. I valori della funzione al variare di n nell'insieme di definizione sono detti gli **elementi della successione** e vengono indicati con una lettera munita di indice: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ che si legge *a* con 0, *a* con 1, …, *a* con *n*. Quando esiste l'espressione analitica della successione, allora si può esprimere il generico elemento a_n (**termine generale della successione**) in funzione di n.

3. Una successione si dice **strettamente**) **crescente** se, presi comunque due indici i e k appartenenti all'insieme di definizione della successione, si ha $i < k \to a_i < a_k$. Analogamente si pongono le definizioni di successione crescente in senso lato, di successione decrescente sia strettamente che in senso lato, e di successione costante.

4. Una successione si dice **limitata superiormente** quando esiste un numero reale k tale che $a_n < k$ per ogni n per cui è definita la successione. Analogamente si parlerà di successione limitata inferiormente e di successione limitatata.

5. Si dice che L è l'**estremo superiore** di una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ quando:

   a) $a_n < L$, $\forall\, n$;

   b) comunque si scelga un numero $\varepsilon > 0$, arbitrariamente piccolo, esiste almeno un elemento a_n della successione tale che $a_n > L - \varepsilon$.

   Analogamente si definisce l'estremo inferiore di una successione. Se l'estremo superiore o inferiore della successione coincidono con un elemento della successione, sono allora il **massimo** o il **minimo** della successione.

6. Si dice che la successione $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ha per **limite** l, al tendere di n a più infinito, quando, prefissato un numero $\varepsilon > 0$, arbitrariamente piccolo, è possibile trovare, in corrispondenza ad esso, un numero n_e tale che, per ogni numero naturale $n > n_e$, sia verificata la relazione $|a_n - l| < \varepsilon$. In tal caso la successione si dice **convergente** e si scrive $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$. Analogamente a quanto fatto nel caso delle funzioni di variabile reale, si definiscono $\lim_{n \to +\infty} a_n = l^-$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = l^+$.

7. Si dice che la successione $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ha per **limite infinito**, al tendere di n a più infinito, quando, prefissato un numero $M > 0$, arbitrariamente grande, è possibile trovare, in corrispondenza ad esso, un numero n_M tale che, per ogni numero naturale $n > n_M$, sia verificata la relazione $|a_n| > M$. In tal caso la successione si dice **divergente** e si scrive $\lim_{n \to +\infty} a_n = \infty$. Se $\forall\, n > n_M$ si verifica $a_n > M$ scriveremo $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ (la successione **diverge positivamente**); mentre se $\forall\, n > n_M$ si verifica $a_n < M$ scriveremo $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ (la successione **diverge negativamente**).

8. Le successioni convergenti o divergenti si dicono **regolari**, mentre quelle che non ammettono limite si dicono **indeterminate** o **oscillanti**.

9. **Teorema di unicità del limite**: se per $n \to +\infty$ una successione ammette limite, questo è unico.

10. **Teorema della permanenza del segno**: se per $n \to +\infty$ una successione tende al limite finito l, diverso da zero, allora esiste un indice n' tale che, $\forall\ n > n'$, a_n ha lo stesso segno del limite.

11. Se esiste un indice n' tale che, $\forall\ n > n'$, i termini di una successione sono positivi (negativi) o nulli e la successione ammette limtie l per $n \to +\infty$, allora è $l \geq 0$ ($l \leq 0$).

12. **Teorema del confronto**: si considerino tre successioni i cui termini generali siano a_n, b_n, c_n. Se, per $n \to +\infty$, è $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \ \wedge \lim_{n\to+\infty} c_n = l$ e se esiste un indice n' tale che, $\forall\ n > n'$, si ha $a_n \leq b_n \leq c_n$, allora è anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.

13. Una successione limitata e monotona è convergente.

14. Una successione monotona crescente e illimitata superiormente diverge positivamente; una successione monotona decrescente e illimitata inferiormente diverge negativamente.

15. Si consideri una successione di elementi a_0, a_1, a_2, …, a_n, …, e una funzione $f(x)$ definita per $x \geq 0$, tale che, per $n \geq 0$, sia $f(n) = a_n$. Se la funzione ammette limite per $x \to +\infty$, allora anche la successione ammette limite e risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Derivata di una funzione

1. Sia $y = f(x)$ una funzione della variabile x definita nell'intervallo $[a, b]$; fissato un particolare punto x di questo intervallo, diamo ad x un incremento arbitrario h, positivo o negativo, in modo che $x + h \in [a, b]$; la differenza $f(x + h) - f(x)$ rappresenta l'**incremento**, positivo, negativo o nullo, che subisce la funzione quando passa dal valore x al valore $x + h$.

2. Il rapporto $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ fra l'incremento della funzione e quello corrispondente della variabile indipendente si chiama **rapporto incrementale** della $f(x)$ relativo al punto x e all'incremento h.

3. Il limite, se esiste, del rapporto incrementale, al tendere a zero dell'incremento dato alla variabile indipendente, si chiama **derivata della funzione** $f(x)$ nel punto considerato x, e si denota con una o l'altra di queste scritture: y', $f'(x)$, $D_x y$, Dy, $Df(x)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

4. Quando la derivata della $f(x)$, nel punto x, esiste ed è finita, si dice che la funzione è **derivabile** in quel punto.

5. Se la funzione $f(x)$ è derivabile in tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$, si dice che è **derivabile in tutto l'intervallo**. In questo caso la derivata, essendo definita in tutto l'intervallo $[a, b]$, è una nuova funzione della variabile x, detta *funzione derivata*.

6. Le espressioni $f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ e $f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si chiamano rispettivamente *derivata sinistra* e *derivata destra* della funzione $f(x)$ nel punto x. Perché $f'(x)$ esista è necessario e sufficiente che $f'_-(x) = f'_+(x)$.

7. Ogni funzione, che ammetta derivata finita in un punto, è continua in tale punto.

8. La derivata di una funzione $f(x)$ in un punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto alla curva di equazione $y = f(x)$.

9. **Equazione della tangente in un punto al grafico di una funzione**: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

10. **Equazione della normale in un punto al grafico di una funzione**: $x - x_0 + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0$

11. **Angolo tra due curve**: $\tan\omega = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0) f_2'(x_0)}$

12. Se la derivata di una funzione continua in un punto manca perché le derivate destra e sinistra in quel punto esistono finite ma sono diverse tra loro, si dice che il punto è un **punto angoloso** per la funzione data.

13. Si dice **derivata logaritmica** di una funzione $y = f(x)$ la derivata del logaritmo di questa funzione, cioè $(\ln f(x))' = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

14. Si chiama **derivata del secondo ordine** o **derivata seconda** della funzione $y = f(x)$ la derivata della sua derivata, cioè $y'' = (y')'$. La derivata seconda si indica con i simboli y'', o $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, o $f''(x)$.

15. Si chiama **derivata di ordine ennesimo** della funzione $y = f(x)$ la derivata della sua derivata di ordine (n–1). La derivata di ordine ennesimo si indica con i simboli $y^{(n)}$, o $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, o $f^{(n)}(x)$.

Regole di calcolo delle derivate

Se c è una costante e $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni che possiedono derivate, allora

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$

2. $(cf)' = cf'$

3. Quindi, la derivata di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare delle derivate delle funzioni: **la derivata è un operatore lineare**.

4. $(fg)' = f'g + g'f$

5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2} \quad (g \neq 0)$

6. $\left(\dfrac{c}{g}\right)' = -\dfrac{cg'}{g^2} \quad (g \neq 0)$

7. **Regola di derivazione delle funzioni composte**: se $y = f(z)$ e $z = g(x)$, cioè $y = f[g(x)]$ dove le funzioni $f(z)$ e $g(x)$ sono derivabili, allora $y'_x = f'(z)g'(x)$. Questa regola è valida per un numero finito di variabili intermedie aventi ciascuna una derivata.

8. **Regola di derivazione di una funzione inversa**: se la funzione $y = f(x)$ ha una derivata $y'_x \neq 0$, allora la derivata della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è il reciproco della funzione data: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ o $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

9. **Derivata di una funzione data in forma parametrica**: se la dipendenza tra la funzione y e la variabile indipendente x è data da un parametro t: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, allora $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ o $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

10. **Derivata di una funzione implicita**: se la dipendenza tra x ed y è data da un'espressione implicita $F(x,y) = 0$, allora per calcolare la derivata y'_x è sufficiente: a) calcolare la derivata rispetto a x del primo membro, considerando y come funzione di x; b) uguagliare a 0 questa derivata; c) risolvere rispetto a y' l'equazione così trovata.

11. Se le funzioni $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$ posseggono derivate sino a quello di ordine ennesimo incluso, allora si può calcolare la derivata di ordine ennesimo del prodotto di queste due funzioni mediante la **formula di Leibniz**: $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$

12. **Derivate di ordine superiore delle funzioni date in forma parametrica**: se la dipendenza tra la funzione y e la variabile indipendente x è data da un parametro t: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, allora le derivate di ordine superiore si possono succesivamente calcolaremediante le formule $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx} = (y'_x)'_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$, ecc.

Derivate delle funzioni principali

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(x > 0)$
3. $(\text{sen } x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\text{ sen } x$
5. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
6. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
7. $(\text{arcsen } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$
9. $(\text{arctg } x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
10. $(\text{arc cot } x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
11. $(a^x)' = a^x \ln a$
12. $(e^x)' = e^x$
13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$
14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$ $(x > 0,\ a > 0)$
15. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$
16. $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$
17. $(\text{th } x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$
18. $(\text{cth } x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$
19. $(\text{arsh } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
20. $(\text{arch } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $(x > 1)$

21. $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$

22. $(\operatorname{arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$ $(|x| > 1)$

23. $\left([f(x)]^{g(x)}\right)' = [f(x)]^{g(x)}\left\{g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right\}$

Differenziali

1. Si dice **differenziale** (del primo ordine) *dy* della funzione $y = f(x)$ la parte principale del suo incremento, lineare rispetto all'incremento $dx = \Delta x$ della variabile indipendente *x*.

2. Il differenziale di una funzione è uguale alla sua derivata per il differenziale della variabile indipendente: $dy = y'\,dx$.

3. Se l'incremento Δx della variabile indipendente è piccolo in valore assoluto, allora il differenziale *dy* e l'incremento Δy della funzione $y = f(x)$ sono approssimativamente uguali: $\Delta y \approx dy$, cioè $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$, per cui $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$. Il differenziale di una funzione differisce dall'incremento della funzione per una quantità infinitesima di ordine superiore all'incremento della variabile.

4. Si definisce il **differenziale del secondo ordine** come il differenziale del differenziale del primo ordine: $d^2y = d(dy)$. Si definiscono analogamente i differenziali di ordine successivo.

5. Se $y = f(x)$ e *x* è la variabile indipendente, allora $d^2y = y''(dx)^2$, $d^3y = y^{(3)}(dx)^3$, …, $d^ny = y^{(n)}(dx)^n$, ecc.

6. Se $y = f(u)$ e $u = \varphi(x)$, allora $d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u$, $d^3y = y^{(3)}(du)^3 + 3y''du\,d^2u + y'd^3u$, ecc., dove gli apici indicano le derivazioni rispetto a *u*.

7. Il **differenziale di un arco di curva** *s* di una curva piana data da un'equazione in coordinate cartesiane *x* e *y* si esprime mediante la formula $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$; se l'equazione della curva è del tipo:

   a) $y = f(x)$, allora $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ per $dx > 0$;

   b) $x = f_1(y)$, allora $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$ per $dy > 0$;

   c) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, allora $ds = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ per $dt > 0$;

   c) $F(x, y) = 0$, allora $ds = \dfrac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_y'|}|dx| = \dfrac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_x'|}|dy|$

8. Indicando con α l'angolo formato dalla tangente (diretta nel senso di crescita dell'arco di curva *s*) e dalla direzione positiva dell'asse *x*, si trova: $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{dy}{ds}$.

9. Si chiama **curvatura** *K* in un punto *M* di una curva il limite del rapporto tra l'angolo formato dalle direzioni positive delle tangenti alla curva nei punti *M* e *N* (**angolo di contingenza**) e la lunghezza dell'arco *MN* $= \Delta s$ quando $N \to M$, cioè $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \dfrac{d\alpha}{ds}$ dove α è l'angolo formato dalla tangente al punto *M* (diretta nel senso di crescita dell'arco di curva *s*) e dalla direzione positiva dell'asse *x*.

10. Si chiama **raggio di curvatura** *R* l'inverso del valore assoluto della curvatura, cioè $R = \frac{1}{|K|}$.

11. Se la curva è data da un'equazione esplicita *y = f(x)*, $K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$

12. Se la curva è data da un'equazione implicita *F(x*, *y)* = 0, $K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{3/2}}$

13. Se la curva è data dalle equazioni parametriche $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$ dove $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$

14. Se la curva è data in coordinate polari da un'equazione $r = f(\varphi)$, $K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}$ dove $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, $r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}$

15. Si chiama **cerchio di curvatura** (o **cerchio d'osculazione**) nel punto *M* di una curva la posizione limite del cerchio passante per il punto *M* e per altri due punti *P* e *Q* della curva, quando $P \to M$ e $Q \to M$. Il raggio del cerchio di curvatura è uguale al raggio di curvatura.

16. Le coordinate *X* e *Y* del centro di curvatura di una curva sono date da $X = x - \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''}$ e $Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$.

17. Il luogo geometrico dei centri di curvatura di una curva si chiama **evoluta** della curva.

18. Si chiama **evolvente** di una curva una curva la cui evoluta è la curva data.

19. Si chiama **vertice** di una curva un punto della curva nel quale la curvatura è massima o minima.

Teoremi sulle funzioni derivabili

1. **Teorema di Rolle**: sia *y = f(x)* una funzione continua nell'intervallo chiuso [*a*, *b*] e derivabile in (*a*, *b*); se essa assume agli estremi *a* e *b* dell'intervallo valori uguali, se cioè si ha *f(a) = f(b)*, allora esiste almeno un punto *c* interno all'intervallo (*a*, *b*) nel quale la derivata della funzione è nulla.

2. **Teorema di Cauchy** (o teorema degli accrescimenti finiti): siano date due funzioni *y = f(x)* e *y = g(x)* entrambe continue nell'intervallo [*a*, *b*] e derivabili in (*a*, *b*); inoltre la funzione *g(x)* ammette derivata diversa da zero in tutti i punti dell'intervallo (*a*, *b*); esiste allora almeno un punto *c* interno all'intervallo (*a*, *b*) nel quale si verifica che $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

3. **Teorema di Lagrange**: sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in (a, b); esiste almeno un punto c interno all'intervallo (a, b) nel quale si verifica che $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

4. Se una funzione continua ha derivata nulla in tutti i punti di un intervallo I, essa è costante in quell'intervallo.

5. Se due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ hanno derivate uguali in tutti i punti di un intervallo, esse differiscono per una costante.

6. Sia $y = f(x)$ una funzione continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I. Se la derivata della funzione è sempre positiva, allora la funzione è crescente in I. Se la derivata è sempre negativa, la funzione è decrescente in I.

7. Sia $y = f(x)$ una funzione continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I. Se $f(x)$ è crescente in senso stretto in I, allora, nei punti interni di I, si ha $f'(x) \geq 0$. Se invece $f(x)$ è decrescente, si ha $f'(x) \leq 0$.

8. Una funzione $f(x)$ si dice **crescente nel punto** $x = c$ se esiste un intorno sinistro I_1 di c per tutti gli x del quale è $f(x) < f(c)$ ed esiste un intorno destro I_2 di c per tutti gli x del quale è $f(x) > f(c)$. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile nei punti interni di un intervallo I e la funzione derivata prima, $f'(x)$, sia continua nel punto c interno a I. Se $f'(c) > 0$ allora la funzione è crescente in c; se è $f'(c) < 0$ la funzione è decrescente in c; se è $f'(c) = 0$ allora la funzione può essere crescente, decrescente, oppure né crescente né decrescente in c.

9. **Teorema di De L'Hôpital**: siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite e derivabili in tutti i punti di un intervallo $[a, b]$, eccettuato al più un punto $x_0 \in [a, b]$. Supponiamo che il limite del loro rapporto, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, si presenti nella forma nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$, ossia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, e che nell'intervallo in esame risulti sempre $g'(x) \neq 0$. In tale ipotesi, se esiste il limite del rapporto delle derivate $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni e risulta $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

10. Il teorema di De L'Hôpital si applica anche alla forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e vale anche per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

11. Per eliminare un'indeterminazione del tipo $0 \cdot \infty$ il prodotto $f_1(x) \cdot f_2(x)$, dove $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = \infty$, si trasforma nel quoziente $\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$ (del tipo $\frac{0}{0}$) oppure $\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}$ (del tipo $\frac{\infty}{\infty}$).

12. Per eliminare un'indeterminazione del tipo $\infty - \infty$ è necessario trasformare la differenza $f_1(x) - f_2(x)$ nel prodotto $f_1(x)\left[1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$ ed eliminare anzitutto l'indeterminazione per $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$; se $\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, allora l'espressione considerata si mette sotto la forma $\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}}$ (del tipo $\frac{0}{0}$).

13. Le indeterminazioni dei tipi 1^∞, 0^0, ∞^0 si possono eliminare prendendo innanzitutto il logaritmo e calcolando il limite del logaritmo di $[f_1(x)]^{f_2(x)}$. In questo caso bisognerà eliminare un'indeterminazione del tipo $0\cdot\infty$.

Estremi di una funzione

1. Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo I. Si dice che un punto c di tale intervallo è un **punto di massimo (minimo) relativo** per la funzione $f(x)$ se esiste un intorno di c, contenuto in I, per tutti i punti del quale si abbia $f(x) \le f(c)$ ($f(x) \ge f(c)$). Si dice che $f(c)$ è il **massimo (minimo) relativo** della funzione.

2. Se c è un punto di massimo o di minimo relativo si dice anche che c è un **punto estremante** per la funzione; il corrispondente valore $f(c)$ è detto **estremo relativo**.

3. Sia c un punto di massimo relativo per la funzione $f(x)$; se esiste un intorno di c per tutti i punti del quale, escluso c, si abbia $f(x) < f(c)$, allora si dice che c è un **punto di massimo relativo forte** (o proprio) e che $f(c)$ è un **massimo relativo forte**. In caso contrario si dice che c è un **punto di massimo relativo debole** (o improprio) e che $f(c)$ è un **massimo relativo debole**. In modo analogo si definiscono il **punto di minimo relativo forte** e quello **debole**.

4. Sia c un punto interno all'intervallo I in cui è definita la funzione $f(x)$. Supponiamo che $f(x)$ sia crescente (decrescente) in un intorno sinistro di c e decrescente (crescente) in un intorno destro di c; allora c è un massimo (minimo) relativo forte per la funzione.

5. Si dice che il grafico di una funzione derivabile $y = f(x)$ è **concavo verso il basso** (**concavo verso l'alto**) nell'intervallo (a, b) se per qualsiasi x per cui $a < x < b$ l'arco di curva del grafico è situato al di sotto (al di sopra) della tangente al grafico tracciata per il punto x.

6. Per dire che una curva è concava verso il basso (o verso l'alto) si può dire anche che è **convessa verso l'alto** (o verso il basso).

7. Un punto (x_0, $f(x_0)$) nel quale la concavità del grafico di una funzione $y = f(x)$ passa da positiva a negativa o inversamente si chiama **punto di flesso** della funzione.

8. In un punto di flesso (x_0, $f(x_0)$) del grafico di una funzione esiste un intorno ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$) tale che in corrispondenza ai due intorni ($x_0 - \delta$, x_0) e (x_0, $x_0 + \delta$) il diagramma della funzione sta da parti opposte rispetto alla retta tangente nel punto (x_0, $f(x_0)$). La retta tangente è detta **tangente inflessionale**.

9. Sia (x_0, $f(x_0)$) un punto di flesso di una funzione $f(x)$ e sia $t(x)$ la tangente inflessionale. Si dice che (x_0, $f(x_0)$) è un **flesso ascendente** se $f(x) \le t(x)$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f(x) \ge t(x)$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Si dice che (x_0, $f(x_0)$) è un **flesso discendente** se $f(x) \ge t(x)$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f(x) \le t(x)$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$.

10. Quando la tangente inflessionale è l'asse x o una sua parallela si dice che il **flesso** è a **tangente orizzontale**. Quando la tangente inflessionale è l'asse y o una sua parallela si dice che il **flesso** è a **tangente verticale**.

11. Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I. Se nel punto c, interno a I, la funzione ha massimo o minimo relativo, allora risulta $f'(c) = 0$.

12. Si dice **punto stazionario** un punto c in cui la derivata della funzione $y = f(x)$ è nulla. Un punto stazionario è un **punto a tangente orizzontale**.

13. **Primo criterio per la determinazione degli estremi relativi di una funzione derivabile con il metodo dello studio del segno della derivata prima**. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in un intorno $I = (c - \delta;\ c + \delta)$ del punto stazionario c. Se risulta $f'(x) > 0$ per $c - \delta < x < c$ e $f'(x) < 0$ per $c < x < c + \delta$, allora c è un punto di massimo relativo (forte). Se risulta $f'(x) < 0$ per $c - \delta < x < c$ e $f'(x) > 0$ per $c < x < c + \delta$, allora c è un punto di minimo relativo (forte).

14. **Primo criterio per la determinazione dei punti di flesso a tangente orizzontale con il metodo dello studio del segno della derivata prima**. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in un intorno $I = (c - \delta; c + \delta)$ del punto stazionario c. Se risulta $f'(x) > 0$ per $c - \delta < x < c$ e per $c < x < c + \delta$, allora c è un punto di flesso ascendente a tangente orizzontale. Se risulta $f'(x) < 0$ per $c - \delta < x < c$ e per $c < x < c + \delta$, allora c è un punto di flesso discendente a tangente orizzontale.

15. **Secondo criterio per la determinazione degli estremi relativi di una funzione derivabile con il metodo della derivata seconda**. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile due volte, con derivata seconda continua, nei punti interni di un intervallo I. Se nel punto c, interno a I, risulta $f'(c) = 0$ e $f''(x) < 0$ allora c è un punto di massimo relativo. Se nel punto c, interno a I, risulta $f'(c) = 0$ e $f''(x) > 0$ allora c è un punto di minimo relativo.

16. **Secondo criterio per la determinazione dei punti di flesso a tangente orizzontale con il metodo della derivata terza**. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile tre volte, con derivata terza continua, nei punti interni di un intervallo I. Se nel punto c, interno a I, risulta $f'(c) = f''(c) = 0$ e $f^{(3)}(c) \neq 0$ allora c è un punto di flesso a tangente orizzontale, ascendente se $f^{(3)}(c) > 0$, discendente se $f^{(3)}(c) < 0$.

17. **Metodo delle derivate successive per la determinazione di punti stazionari di una funzione**. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile n volte, con derivata n-esima continua, nei punti interni di un intervallo I. Nel punto c, interno ad I, si abbia $f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Se n è pari allora c è un punto estremante e precisamente un punto di minimo se $f^{(n)}(c) > 0$ e di massimo se $f^{(n)}(c) < 0$. Se n è dispari allora c è un punto di flesso a tangente orizzontale e precisamente un punto di flesso ascendente se $f^{(n)}(c) > 0$ e discendente se $f^{(n)}(c) < 0$.

18. Per la ricerca del **massimo assoluto** di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ occorre confrontare il massimo tra i massimi relativi della funzione con i valori $f(a)$ e $f(b)$. Analogamente si opera per trovare il **minimo assoluto**. Nel caso in cui la funzione non sia derivabile in qualche punto dell'intervallo, occorre confrontare il maggiore dei massimi e il minore dei minimi anche con tali punti.

19. Sia data una funzione $y = f(x)$ due volte derivabile nei punti interni di un intervallo I e sia c un punto interno di I. Se è $f''(c) > 0$ allora la curva di equazione $y = f(x)$ è, nel punto di ascissa x, concava verso l'alto; se è $f''(c) < 0$ allora la curva di equazione $y = f(x)$ è, nel punto di ascissa x, concava verso il basso.

20. **Primo criterio per la determinazione dei punti di flesso di una funzione con il metodo dello studio del segno della derivata seconda**. Sia $y = f(x)$ una funzione tale che: 1) $f(x)$ sia due volte derivabile sia in un intorno sinistro $I_s \subset I$, sia in un intorno destro $I_d \subset I$, di un punto c interno a I; 2) $f''(x)$ assuma nell'intorno sinistro I_s valori di segno opposto a quelli che assume nell'intorno destro I_d; in $x = c$ esista la derivata prima $f'(x)$, finita o infinita; allora il punto c è un punto di flesso per la funzione $f(x)$. Se $f'(c) \neq 0$ il flesso è a tangente obliqua; se $f'(c) = 0$ il flesso è a tangente orizzontale; se la derivata in c è infinita il flesso è a tangente verticale.

21. **Secondo criterio per la determinazione dei punti di flesso di una funzione con il metodo della derivata terza.** Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile tre volte, con derivata terza continua, nei punti interni di un intervallo I. Se nel punto c, interno a I, risulta $f''(c) = 0$ e $f^{(3)}(c) \neq 0$ allora la funzione ha, in c, un punto di flesso, ascendente se $f^{(3)}(c) > 0$, discendente se $f^{(3)}(c) < 0$.

22. **Metodo delle derivate successive per la determinazione dei punti di flesso di una funzione**. Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile n volte, con derivata n-esima continua, nei punti interni di un intervallo I. Nel punto c, interno ad I, si abbia $f''(c) = f^{(3)}(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Se n è dispari allora c è un punto di flesso e precisamente il flesso è ascendente se $f^{(n)}(c) > 0$ e discendente se $f^{(n)}(c) < 0$. Se n è pari allora in c la curva di equazione $y = f(x)$ è concava verso l'alto se $f^{(n)}(c) > 0$ e concava verso il basso se $f^{(n)}(c) < 0$.

Studio di una funzione

1. Si determina il dominio D della funzione dopo averla classificata (algebrica o trascendente o, in particolare, razionale intera o fratta, irrazionale, logaritmica, esponenziale, goniometrica).

2. Si determinano eventuali simmetrie e periodicità; se la funzione è dispari basterà studiarla per $x \geq 0$ e se è periodica di periodo T basterà studiarla in un intervallo di ampiezza T.

3. Si determinano eventuali punti di intersezione del grafico con gli assi coordinati.

4. Si studia il segno della funzione risolvendo la disequazione $f(x) > 0$ e determinando l'insieme di positività (I.P.) e di negatività (I.N.) della funzione.

5. Si calcolano i limiti della funzione negli estremi finiti, se esistono, del dominio e si deducono gli eventuali asintoti verticali; se D è illimitato, si calcolano i limiti all'infinito, determinando se vi sono asintoti orizzontali o obliqui, e le eventuali intersezioni di questi con il grafico.

6. Si calcola la derivata prima $f'(x)$ determinandone il dominio D'.

7. Si risolve l'equazione $f'(x) = 0$ determinando le eventuali ascisse dei punti in cui la tangente al grafico è parallela all'asse x e si calcolano poi le corrispondenti ordinate.

8. Si studia il segno della derivata prima, risolvendo la disequazione $f'(x) > 0$, stabilendo così in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente. Si dedurrà quindi se i punti precedentemente trovati sono massimi o minimi relativi o flessi a tangente orizzontale.

9. (Se lo studio del segno della derivata fosse troppo difficoltoso, per decidere se una radice dell'equazione $f'(x) = 0$ è un punto di massimo, minimo o flesso orizzontale si può procedere mediante le derivate successive).

10. Si procede infine al calcolo dei limiti della derivata $f'(x)$ negli estremi finiti di D' e nei suoi punti di discontinuità, determinando l'inclinazione della tangente nei punti di arrivo e di partenza, gli eventuali punti angolosi, di cuspide e di flesso a tangente verticale.

11. Si calcola la derivata seconda $f''(x)$ e se ne studia il segno, determinando gli intervalli in cui la curva volge la concavità verso l'alto o verso il basso, deducendo quindi le coordinate degli eventuali punti di flesso.

12. (Non volendo studiare il segno di $f''(x)$ si può ricorrere al metodo delle derivate successive).

13. Si traccia infine il grafico della funzione.

Integrale

Integrale indefinito

1. Si dice **primitiva** di una funzione $f(x)$ una funzione $F(x)$ la cui derivata sia uguale a $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.

2. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$, anche $F(x) + C$, dove C è una costante arbitraria, è una primitiva di $f(x)$.

3. Si chiama **integrale indefinito** di $f(x)$ la sua primitiva generale $F(x) + C$ e si rappresenta con il simbolo $\int f(x)dx$, che si legge "integrale di $f(x)$ in dx". La $f(x)$ si dice *funzione integranda*.

4. L'integrale indefinito può essere inteso come **operatore inverso della derivata** perché associa a una funzione $f(x)$ l'insieme di tutte e sole le funzioni la cui derivata è la $f(x)$ stessa.

5. Se k è una costante, allora si ha $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

6. Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni; allora si ha $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

7. Quindi, l'integrale della combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali delle funzioni: **l'integrale indefinito è un operatore lineare**.

Integrali delle funzioni principali

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcotg}\frac{x}{a} + C_1 \quad a \neq 0$

4. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad a \neq 0$

5. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad a \neq 0$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad a \neq 0$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C \quad a > 0$

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad a > 0$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

11. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \cot x + C$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\tan x + \sec x| + C$

16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

17. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Regole di integrazione

1. **Integrazione per decomposizione**: quando si deve calcolare l'integrale di una funzione $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, decomponibile nella somma di più funzioni, si può calcolare:

$$\int f(x)dx = \int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

2. **Integrazione per introduzione sotto il segno di differenziale**: se $\int f(x)dx = F(x) + C$ e $u = \varphi(x)$, allora $\int f(u)du = F(u) + C$ e quindi $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

3. La tavola degli integrali principali può quindi essere generalizzata: $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$); $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$; ecc.

4. **Integrazione per sostituzione**: Ponendo $x = \varphi(t)$, dove t è una nuova variabile e φ una funzione continua derivabile, si ha $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Si cerca di scegliere la funzione φ in modo che il secondo membro abbia una forma comoda per l'integrazione; in particolare:

   a) se l'integrale contiene il radicale $\sqrt{a^2 - x^2}$ si pone $x = a$ sen t, da cui $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$;

   b) se l'integrale contiene il radicale $\sqrt{x^2 - a^2}$ si pone $x = a$ sec t, da cui $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t$;

   c) se l'integrale contiene il radicale $\sqrt{x^2 + a^2}$ si pone $x = a$ tan t, da cui $\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t$;

   d) se l'integrale è nella forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ dove R è una funzione razionale, si pone:

      i) per $a > 0$, si pone $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ e si riduce la funzione integranda a una funzione razionale di t;

      ii) per $a < 0$, si pone $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$ dove α è una delle radici del trinomio $ax^2 + bx + c$.

   e) se l'integrale è nella forma $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$ si pone $2ax + b = t$;

   f) se l'integrale è nella forma $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots\right]dx$ dove R è una funzione razionale e p_1 q_1, p_2, q_2, … numeri interi, si pone $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ dove n è il minimo comune multiplo dei numeri q_1, q_2, …

   g) se l'integrale è nella forma $\int x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$ dove m, n e p sono numeri razionali, ci si può ridurre alla combinazione di funzioni elementari nei tre casi seguenti (**condizioni di Cebyscev**):

      i) se p è un numero intero;

      ii) se $\frac{m+1}{n}$ è un numero intero si pone $a + bx^n = z^s$, dove s è il denominatore della frazione p;

      iii) se $\frac{m+1}{n} + p$ è un numero intero si pone $ax^{-n} + b = z^s$, dove s è il denominatore della frazione p.

5. **Integrazione per parti**: se $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$ sono funzioni derivabili, allora si ha $\int udv = uv - \int vdu$, ossia $\int \varphi(x)\psi'(x)dx = \varphi(x)\psi(x) - \int \psi(x)\varphi'(x)dx$. Si chiama $\varphi(x)$ **fattore finito** e $d\psi(x) = \psi'(x)dx$ **fattore differenziale**.

6. **Integrazione delle funzioni razionali fratte**: l'integrazione di una funzione razionale fratta, dopo aver ricavato la sua parte intera, si riduce all'integrazione di una *funzione razionale regolare* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dove *P(x)* e *Q(x)* sono polinomi interi, e il grado del numeratore *P(x)* è inferiore a quello del denominatore *Q(x)*:

   a) Se $Q(x) = (x - a)^{\alpha} \dots (x - l)^{\lambda}$, dove $a, \dots, l$ sono le radici reali differenti del polinomio *Q(x)* e $\alpha, \dots, \lambda$ numeri naturali (molteplicità delle radici), allora è possibile la decomposizione

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}$$

   Per calcolare i coefficienti A_1, A_2, …, L_λ si riducono allo stesso denominatore i due membri dell'identità e poi si eguagliano i coefficienti delle stesse potenze della variabile *x*;

   b) se *Q(x)* ha radici complesse $a \pm ib$ di molteplicità *k*, allora della decomposizione fanno parte elementi semplici del tipo $\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{(x^2 + px + q)^k}$ dove $x^2 + px + q = [x - (a + ib)][x - (a - ib)]$ ed *M1*, *N1*, …, *Mk*, *Nk* sono coefficienti indeterminati che si possono determinare con i metodi indicati precedentemente; se $k = 1$ la frazione viene integrata immediatamente; se $k > 1$ si applica il metodo di riduzione; è raccomandabile trasformare il trinomio di secondo grado $x^2 + px + q$ in $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$ e fare la sostituzione di variabile $x + \frac{p}{2} = z$.

7. **Integrazione delle funzioni goniometriche**:

   a) Integrali del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = I_{m,n}$ dove *m* e *n* sono numeri interi:

      i) se $m = 2k + 1$ è un numero positivo dispari si pone

      $$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = -\int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$$

      ii) se $n = 2k + 1$ è un numero positivo dispari si pone

      $$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k} x d(\operatorname{sen} x) = \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k d(\operatorname{sen} x)$$

      iii) se *m* e *n* sono numeri positivi pari, la funzione integranda si trasforma con l'aiuto delle formule $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$;

      iv) se $m = -\mu$ e $n = -\nu$ sono numeri negativi della stessa parità, allora

      $$I_{m,n} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^\mu x \cos^\nu x} = \int \operatorname{cosec}^\mu x \sec^{\nu - 2} x d(\tan x) = \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\mu/2} (1 + \tan^2 x)^{\frac{\nu - 2}{2}} d(\tan x) =$$

      $$= \int \frac{(1 + \tan^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2} - 1}}{\tan^\mu x} d(\tan x)$$

      v) gli integrali del tipo $\int \tan^m x dx$ (o $\int \cot^m x dx$), dove *m* è un numero intero positivo, si calcolano con l'aiuto della formula $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ (o $\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$)

vi) nel caso generale gli integrali $I_{m,n}$ si calcolano con l'aiuto delle formule ricorrenti che si stabiliscono integrando per parti;

vii) gli integrali del tipo $\int \operatorname{sen} xm \cos nx dx$, $\int \operatorname{sen} xm \operatorname{sen} nx dx$, $\int \cos xm \cos nx dx$ si calcolano utilizzando le formule:

- $\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$

- $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

- $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

viii) se l'integrale è del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ dove R è una funzione razionale, si pone $\tan\frac{x}{2} = t$.

Integrale definito

1. Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo [a, b] suddiviso in n parti mediante una suddivisione arbitraria $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Si chiama **somma integrale** della funzione $f(x)$ su [a, b] ogni somma del tipo

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{dove } x_i \le \xi_i \le x_{i+1}; \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

2. Il limite della somma integrale, quando il numero di divisioni n tende all'infinito e la più grande delle Δx_i tende a zero, si chiama **integrale definito** della funxione $f(x)$ relativo all'intervallo [a, b] e si indica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

3. Il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ si legge "integrale da a a b di $f(x)dx$", i numeri a e b si dicono **estremo inferiore** ed **estremo superiore** dell'integrale, x è la **variabile d'integrazione** e $f(x)$ la **funzione integranda**.

4. Se la funzione $f(x)$ è continua in [a, b], essa è integrabile su [a, b], cioè il limite della somma integrale esiste e non dipende da come è stato diviso l'intervallo [a, b] in intervalli parziali e in che modo sono stati scelti i punti ξ_i in questi intervalli.

5. Geometricamente l'integrale definito rappresenta la somma algebrica delle aree delle figure delimitate dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse, prendendo con il segno positivo le aree delle figure situate al di sopra dell'asse dalle ascisse e con il segno negativo le aree delle figure situate al di sotto dell'asse.

6. Per convenzione si pone $\int_a^a f(x)dx = 0$.

7. Scambiando tra loro gli estremi di un integrale, l'integrale cambia segno: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

8. Dal significato dell'integrale definito risulta che, se *c* è un punto interno all'intevallo [*a*, *b*], e *k* una costante, si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \;; \quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Questa proprietà vale anche se *c* non appartiene all'intervallo e si estende al caso in cui tra *a* e *b* siano inseriti più punti. Perciò l'integrale definito su [*a*, *b*] di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare degli integrali definiti su [*a*, *b*] delle funzioni: **l'integrale definito è un operatore lineare**.

9. Si ha $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

10. **Teorema della media**: se la funzione *f* è continua nell'intervallo chiuso e limitato [*a*, *b*], allora esiste almeno un punto *c* dell'intervallo [*a*, *b*] per cui si ha $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

11. Si dice **valore medio** della funzione *f* nell'intervallo [*a*, *b*] e si indica con V_m il numero $V_m = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

12. Si chiama **funzione integrale** della funzione *f* in [*a*, *b*] la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ che associa ad ogni *x* ∈ [*a*, *b*] il valore numerico $\int_a^x f(t)dt$. La variabile indipendente per la funzione *F* è l'estremo superiore *x* dell'integrale definito. La variabile *t* è la variabile d'integrazione e ad essa si può sostituire qualsiasi altra variabile.

13. **Teorema fondamentale del calcolo integrale**: se la funzione *f(x)* è continua in [*a*, *b*], la corrispondente funzione integrale *F(x)* è derivabile e, per ogni *x* ∈ [*a*, *b*], risulta *F'(x)* = *f(x)*.

14. La funzione integrale è quindi una primitiva di *f(x)*. Poiché la primitiva generale di *f(x)* è il suo integrale indefinito, si ha $\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C$

15. **Formula di Newton-Leibniz**: l'integrale definito di una funzione è uguale alla differenza dei valori assunti da una qualsiasi sua primitiva rispettivamente nell'estremo superiore di integrazione e nell'estremo inferiore: $\int_a^b f(x)dx = |F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

16. **Integrali impropri con limiti infiniti** (o **di 1° tipo**): se la funzione *f(x)* è integrabile in ogni intervallo [*a*, *t*] ⊂ [*a*, +∞), si dice che la funzione *f(x)* è **integrabile in senso improprio** (o **generalizzato**) nell'intervallo [*a*, +∞) se esiste finito il limite $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ e scriveremo $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$. In tale caso si dice che l'integrale improprio è **convergente**. Se il limite è infinito si dice che la funzione *f(x)* non è integrabile in senso improprio nell'intervallo [*a*, +∞) e l'integrale è **divergente**. Se il limite non esiste si dice che l'integrale è **indeterminato**.

17. In modo analogo si definiscono gli integrali impropri negli intervalli (-∞, *b*] e (-∞, +∞).

18. **Integrali impropri di funzioni non limitate** (o **di 2° tipo**): se la funzione *f(x)* è limitata e integrabile in ogni intervallo [*a*, *b* – ε] (0 < ε < *b* – *a*) strettamente contenuto in[*a*, *b*] e illimitata in *x* = *b*. Si dice che la funzione *f(x)* è **integrabile in senso improprio** (o **generalizzato**) nell'intervallo [*a*, *b*] se esiste finito il limite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ e scriveremo $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. In tale caso si dice che l'integrale improprio è **convergente**. Se il limite è infinito si dice che la funzione *f(x)* non è integrabile in senso improprio nell'intervallo [*a*, *b*] e l'integrale è **divergente**. Se il limite non esiste si dice che l'integrale è **indeterminato**.

19. In modo analogo si definisce l'integrale improprio nel caso generale di una funzione *generalmente limitata* in [*a*, *b*], cioè che ha in tale intervallo un numero limitato di punti in cui non è limitata.

20. **Aree delle figure piane**:

    a) se una curva continua è data in coordinate ortogonali dall'equazione *y* = *f(x)* (*f(x)* ≥ 0), allora l'area del trapezio curvilineo delimitato da questa curva, dalle due rette verticali *x* = *a* e *x* = *b* e dall'asse delle ascisse è data da $S = \int_a^b f(x)dx$

    b) se la curva è data dalle equazioni parametriche $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, allora l'area del trapezio curvilineo delimitato da questa curva, dalle due rette verticali *x* = *a* e *x* = *b* e dall'asse delle ascisse è data da $S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt$ dove t_1 e t_2 sono determinate dalle equazioni $a = \varphi(t_1)$ e $b = \varphi(t_2)$.

    c) Se una curva continua è data in coordinate polari dall'equazione $r = f(\varphi)$, allora l'area del settore limitato dall'arco di curva e dai due raggi polari *OA* e *OB* corrispondenti ai valori $\varphi_1 = \alpha$ e $\varphi_2 = \beta$ è data da $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2 d\varphi$

21. **Lunghezza di un arco di curva**:

    a) se una curva continua è data in coordinate ortogonali dall'equazione *y* = *f(x)*, allora la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i due punti di ascissa *x* = *a* e *x* = *b* è data da $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$;

    b) se la curva è data dalle equazioni parametriche $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ e φ e ψ sono funzioni continuamente derivabili, allora la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i due punti di ascissa *x* = *a* e *x* = *b* è data da $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ dove t_1 e t_2 i valori del parametro corrispondenti agli estremi dell'arco;

    c) se una curva continua è data in coordinate polari dall'equazione $r = f(\varphi)$, allora la lunghezza di un arco di curva è data $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$ dove α e β sono i valori dell'angolo polare corrispondenti agli estremi dell'arco.

22. **Volume dei solidi di rotazione**: il volume del corpo generato dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse di un trapezio curvilineo limitato dalla curva *y* = *f(x)*, l'asse delle ascisse e due rette verticali *x* = *a* e *x* = *b* è dato da $V = \pi \int_a^b y^2dx$.

23. **Area di una superficie di rotazione**: l'area della superficie generata dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse dell'arco dalla curva *y = f(x)* compreso tra i punti di ascissa *x = a* e *x = b* è dato da $S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

Integrali notevoli

1. **Integrale di Eulero-Poisson**: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

2. **Integrale di Eulero di prima specie** (**funzione beta**): $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

3. **Integrale di Eulero di seconda specie** (**funzione gamma**): $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$